Cours de Géométrie descriptive.

Deuxième section.

Compléments de Géométrie pure.

M. Haag, Ingénieur des Ponts et Chaussées, chargé du Cours.

Bordeaux, 1870-1871.

Table des matières

Appendice

1re Année d'études.
1870 - 1871.

École polytechnique.

Cours de Géométrie descriptive.

Deuxième section

Complément de Géométrie pure.

M. Haag, Ingénieur des Ponts et Chaussées,
Chargé du Cours.

Bordeaux, le 11 Janvier 1871.

Observations générales, l'ensemble du Cours

Le cours de Géométrie se divise naturellement en deux parties[1]

Dans l'une, on expose les différentes méthodes employées pour la représentation graphique des figures de l'espace;

Dans l'autre, qui fait l'objet de ces leçons, on étudie les lignes et les surfaces d'une façon abstraite, et indépendamment du mode

---

[1] Cette division qui se trouve indiquée dans le cours professé pendant ces dernières années à l'École s'accentuera sans doute de plus en plus. Les méthodes géométriques ont fait depuis le commencement de ce siècle des progrès auxquels un enseignement tel que celui de l'École polytechnique ne saurait rester étranger; et l'on sera naturellement amené à réunir dans un cours spécial les belles théories de la Géométrie moderne qui figurent actuellement à l'état d'épaves dans les cours de Mécanique, de Physique et d'Analyse.

de représentation exacte.

Cette seconde partie forme un complément aux Cours élémentaires de Géométrie pure.

Un aperçu rapide sur les méthodes géométriques y servira d'introduction. On exposera ensuite d'une manière suffisamment étendue les propriétés générales les plus importantes des courbes planes, des courbes à double courbure et des surfaces. La théorie des surfaces quelconques sera précédée de l'étude des développables intimement liée à celle des courbes gauches. Elle sera suivie par l'exposé des propriétés spéciales aux différentes espèces de surfaces et notamment aux surfaces gauches et de révolution. Parmi ces surfaces gauches, on s'occupera principalement du paraboloïde, de l'hyperboloïde à une nappe et des hélicoïdes. Parmi les surfaces de révolution, le tore sera plus particulièrement étudié.

Afin de ne pas embarrasser le cours par des développements dont la longueur pourrait faire perdre de vue la suite générale des idées, afin aussi de s'écarter le moins possible du programme actuellement suivi, on a relégué dans un appendice toutes les matières dont la présence dans le texte n'était pas indispensable. Cette disposition a permis d'exposer avec plus de détails dans des notes spéciales certaines théories géométriques qu'il semblait utile de signaler à l'attention des élèves.

Introduction.

Des méthodes en géométrie.

La géométrie élémentaire consiste dans un certain nombre de propositions fondamentales concernant la ligne droite, le plan, le cercle & la sphère, qui nous ont été léguées par les géomètres de l'antiquité & qui servent de base à toute la science des figures.

C'est en partant de ces notions primordiales & en s'élevant de proche en proche à des notions plus complexes, en rattachant des théorèmes isolés à d'autres théorèmes isolés, que pendant longtemps s'est développée la géométrie. Mais à mesure que l'esprit généralisateur dû à l'algèbre se répandait dans la science, on a cherché à substituer à cette marche lente & incertaine des procédés nouveaux pouvant fournir la solution des problèmes d'une façon plus régulière & plus assurée. De là les méthodes de la géométrie moderne. On se bornera à indiquer ici les principales en essayant d'en expliquer le caractère.

1° Méthode analytique ou des coordonnées.

En première ligne se placent les procédés analytiques consistant à ramener directement les problèmes de géométrie à des questions d'algèbre par l'emploi des coordonnées. Quel que soit d'ailleurs le système des coordonnées adopté, l'effet de toutes ces méthodes est de substituer aux quantités géométriques diverses qui entrent dans les relations, tant par leur situation que par leur grandeur d'autres quantités, géométriques encore, mais toutes de même espèce, facilement comparables entre elles & qu'on puisse considérer, sans tenir compte de leur caractère géométrique, comme des grandeurs algébriques ou abstraites. C'est dans cette substitution que consiste la [illegible]

équation des problèmes, et malgré la complication que cette mise en équation introduit la plupart du temps dans les relations la possibilité d'appliquer ensuite aux questions les plus diverses les procédés uniformes du calcul algébrique rend cette méthode des coordonnées extrêmement féconde. C'est d'elle qu'est sortie la géométrie analytique toute entière.

2° Méthodes indirectes.

On peut réunir dans un second groupe un certain nombre de méthodes consistant dans l'emploi de procédés indirects dont la réussite souvent inattendue peut être prévue quelquefois d'après la nature même des problèmes auxquels ils sont appliqués.

a, Méthodes de transformation

Dans ce groupe il faut citer en premier lieu les méthodes de transformation. Leur principe consiste à reconnaître dans un mode de transformation donné, quelles sont les propriétés métriques ou graphiques qui subsistent. Ces propriétés une fois établies permettent dans une certaine mesure de ramener l'étude d'une figure compliquée à celle d'une figure plus simple.

Nous mentionnerons :

1° La transformation par perspective, (cylindrique ou conique,) applicable aux figures planes seulement : à un point correspond un point, à une droite une droite, par conséquent le degré et la classe des courbes se conservent : les courbes tangentes entre elles restent tangentes,[(1)] etc. — : Cette méthode est spécialement applicable à l'étude des sections coniques qui peuvent toutes être considérées comme les perspectives d'un cercle.

2° La transformation par rayons vecteurs réciproques :
Etant pris un pôle de transformation o, on construit le point m' correspondant à un point m en prenant sur le rayon om une longueur om

(1) On verra d'après la définition donnée plus loin de l'ordre du contact de deux courbes que cet ordre n'est pas changé toutes les fois que dans un mode de transformation à un point donné correspond un autre point et un seul.

telle que $\overline{om} \times \overline{om'}$ soit égal à une constante arbitraire K^2: à un point correspond un point; à une droite & à un plan, un cercle & une sphère passant par le pôle: à un cercle ou une sphère en général un cercle & une sphère: le caractère le plus important de ce mode de transformation c'est que les angles finis sous lesquels deux courbes se coupent, se conservent. (Voir à ce sujet la note 1 de l'appendice.)

3° La transformation par polaires réciproques: étant choisie une section conique dans un plan ou une surface du second degré dans l'espace, on prend par rapport à cette courbe ou à cette surface la droite polaire ou le plan polaire de chaque point de la première figure. Ainsi donc, dans le premier cas, à un point correspondra une droite & réciproquement, à des points en ligne droite correspondront des droites passant par un même point: Dans le second, à un point correspondra un plan, à une droite une droite, à des points en ligne droite des plans formant un faisceau, à des droites situées dans un même plan, d'autres droites passant par un même point: à une courbe, une développable, & aux points de l'une les plans tangents de l'autre; le degré d'une courbe en transformation plane sera d'ailleurs égal à la classe de sa transformée. Les lignes du second degré étant aussi de la seconde classe resteront donc du second degré.

Méthodes mécaniques

Après ces méthodes de transformation viennent les Méthodes mécaniques: souvent par des considérations mécaniques on arrive à un résultat qui ne renferme ni le temps ni des fonctions (vitesse, accélération, etc) & qu'il eut été difficile d'obtenir sans l'emploi de ces quantités auxiliaires. Nous citerons une foule de théorèmes de géométrie démontrée par la cinématique - la méthode de Roberval pour le tracé des tangentes - une méthode analogue pour la détermination des rayons de courbure (voir Note N° 2 et Note 1, page 10)

C. Interprétation des figures planes par la Géométrie à 3 dimensions.

Enfin il faut encore classer parmi les méthodes indirectes un procédé de démonstration qui donne souvent des solutions inattendues & extrêmement simples & qui consiste dans l'interprétation des figures planes par la géométrie à trois dimensions, on en trouvera quelques exemples dans la note N° 3.

3° Méthodes de la Géométrie supérieure ou des faisceaux & des Séries

Une marche différente & plus conforme à l'esprit vraiment géométrique a conduit aux méthodes de la géométrie supérieure qu'on rangera dans un troisième groupe.

Les géomètres anciens par la démonstration des propriétés fondamentales de la droite, du plan, du cercle & de la sphère avaient créé, comme on l'a dit en commençant, la base de toute géométrie, parceque la droite, le plan le cercle & la sphère sont des éléments qui s'introduisent naturellement dans toute question géométrique. Pour une raison analogue, en étudiant d'une façon complète les séries de points en ligne droite, les faisceaux de droites & les faisceaux de plans, on est arrivé à des propriétés d'une application générale qui peuvent servir à leur tour à la démonstration des théorèmes. Ces propriétés constituent les théories du Rapport anharmonique de l'Homographie & de l'Involution, sur lesquelles on trouvera dans la note N° 4 quelques indications sommaires.

4° Méthode des limites ou Méthode infinitésimale

Comme dernière méthode générale, on indiquera la méthode des limites dont il sera fait dans la suite de ces leçons un usage des plus fréquents.

Cette méthode a déjà été employée dans les cours préparatoires à l'Ecole, soit pour définir une position, (tangente, limite de sécante) soit pour déterminer une grandeur (rapport de la circonférence au diamètre

Elle s'impose naturellement à l'esprit par la définition même de certains éléments métriques ou graphiques

tels que la tangente,[1] la longueur d'un arc et l'aire d'une courbe, le plan tangent, l'aire et le volume d'une surface, etc. Et l'on peut dire en résumé que son emploi plus ou moins apparent est indispensable :

1° Toutes les fois qu'on se propose de déterminer l'un des éléments ci-dessus mentionnés et qui par définition même sont des limites

2° toutes les fois qu'on étudie sur les courbes ou les surfaces des propriétés de continuité, c'est-à-dire indépendantes de la nature particulière de la courbe ou de la surface et dues simplement à la solidarité qui existe nécessairement entre leurs éléments consécutifs

En outre cette méthode pourra être utilement employée dans une foule de cas où elle n'est pas absolument nécessaire. Nous citerons la recherche des maxima et minima et plusieurs autres applications dont on trouvera dans la note 5 quelques exemples.

La méthode des limites consiste à substituer aux figures et plus généralement aux grandeurs géométriques ou autres que l'on considère d'autres figures et d'autres grandeurs variables, plus faciles à étudier et dont les premières seront les limites.

C'est ainsi qu'on pourra remplacer une courbe par un polygone inscrit dans cette courbe et dont les cotés très petits, vont en décroissant indéfiniment. une tangente par une sécante dont deux points d'intersection avec la courbe se rapprochent de plus en plus, etc, pourvu que les relations qu'on établit se conservent lorsqu'on déforme la seconde figure pour revenir à la première.

C'est sur ce point délicat, et qui doit être scrupuleusement vérifié sous peine d'arriver aux résultats les plus inexacts, que doit se porter toute l'attention

---

(1) Les géomètres anciens avaient essayé de définir la tangente sans recourir aux considérations infinitésimales. Selon eux, la tangente est une droite, n'ayant qu'un point commun avec la courbe et laissant d'un même coté tous les points de celle-ci Il est aisé de voir combien cette définition est défectueuse

Dans le cours d'Analyse, qui n'est qu'une application à l'algèbre et à la Géométrie analytique de la méthode infinitésimale, on donne des règles précises pour faciliter la vérification dont nous venons de parler, mais les questions de géométrie proprement dite se prêtent difficilement à l'établissement de règles aussi générales, et chaque cas, chaque figure exige d'ordinaire une étude spéciale.

Afin de ne pas développer outre mesure la longueur des démonstrations, on sera fréquemment obligé de glisser sur ces vérifications, qui d'ailleurs trop souvent répétées deviendraient fastidieuses. Les élèves y suppléeront facilement et si ce travail exige de leur part un peu d'attention, il ne présentera jamais de sérieuses difficultés et contribuera très utilement à les familiariser avec une méthode dont ils apprécieront bientôt la puissance et les ressources.

On emploiera, comme dans le cours d'analyse la dénomination d'Infiniment petites ou infinitésimales pour désigner des grandeurs variables & tendant vers la limite 0 (1) ainsi le rapport de deux lignes infiniment petites sera le rapport de deux lignes variables tendant chacune vers 0; un polygone infinitésimal sera un polygone dont les côtés de plus en plus petits tendent à devenir nuls, & dont la limite sera par conséquent une courbe. Enfin les infiniment petits pourront être distingués en divers ordres comme on le fait en analyse, par comparaison avec un infiniment petit principal. (2)

---

(1) La dénomination d'infiniment grand dont on fait moins fréquemment usage devrait désigner de même une quantité variable tendant vers l'infini.

(2) Les infiniments petits peuvent conduire à des relations entre quantités finies, soit qu'on considère leur somme en nombre infiniment grand, soit qu'on prenne le rapport de deux quantités infiniment petites de même ordre. C'est principalement à ce dernier point de vue qu'on aura à les employer dans la suite de ces leçons.

Notions Complémentaires sur les courbes planes & gauches

1° Courbes planes

Points consécutifs, angle de contingence

Une courbe plane étant donnée inscrivons dans cette courbe un polygone infinitésimal dont les cotés aient tous même longueur. Nous appelerons points consécutifs de la courbe, les sommets successifs de ce polygone : l'angle de deux cotés consécutifs sera dit angle de Contingence.

Ordre de contact de deux courbes.

Deux courbes sont dites avoir entre elles un Contact d'ordre n si elles ont $n+1$ points consécutifs communs.

Deux courbes qui n'ont qu'un point commun sont sécantes entre elles.

Courbes osculatrices

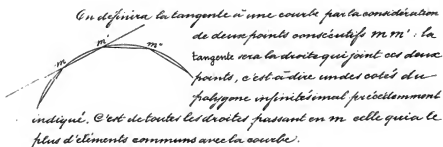
Une courbe peut être caractérisée algébriquement par le nombre de paramètres que son équation renferme et géométriquement par le nombre de points par lesquels on peut la faire passer : On a démontré en géométrie analytique que ces deux caractères n'en faisaient qu'un.

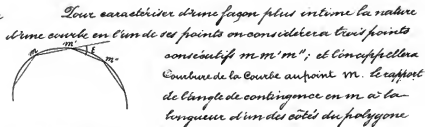
En se plaçant à ce point de vue on dira qu'une courbe est osculatrice à une courbe donnée en l'un de ses points lorsqu'elle a en ce point avec la courbe donnée le contact le plus intime compatible avec sa définition. On voit donc que si la première courbe peut passer par n points, pour qu'elle soit osculatrice à la seconde, il faudra qu'elle ait avec celle ci un contact d'ordre $n-1$.

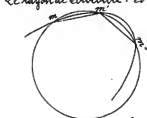
D'après cette définition, les deux courbes dans l'osculation ne jouent pas le même rôle, et il serait inexact de dire que si la première est osculatrice à la seconde, la seconde soit réciproquement osculatrice à la première. Ainsi un cercle étant osculateur à une conique, la conique n'est pas en

général osculatrice au cercle : la première condition en effet n'exige qu'un contact du second ordre, la seconde en exige un du quatrième.

Tangente

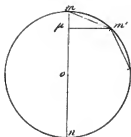
On définira la tangente à une courbe par la considération de deux points consécutifs $m\,m'$: la tangente sera la droite qui joint ces deux points, c'est-à-dire un des côtés du polygone infinitésimal précédemment indiqué. C'est de toutes les droites passant en m celle qui a le plus d'éléments communs avec la courbe.

Courbure ; Cercle osculateur

Pour caractériser d'une façon plus intime la nature d'une courbe en l'un de ses points on considérera trois points consécutifs $m\,m'\,m''$; et l'on appellera Courbure de la Courbe au point m. le rapport de l'angle de contingence en m à la longueur d'un des côtés du polygone

Le rayon de courbure : est l'inverse de la courbure ; sa valeur sera

$$\rho = \lim . \frac{\overline{mm'}}{\varepsilon}$$

Soit un cercle passant par les trois points $m.\,m'\,m''$. Ce cercle a pour rayon le rayon de courbure, c'est le cercle osculateur. Trois points définissant un cercle, on voit que le cercle osculateur est de tous les cercles passant au point m celui qui a en ce point le contact d'ordre le plus élevé avec la courbe. La dénomination de cercle osculateur se trouve ainsi justifiée.

Le cercle osculateur a son centre sur la normale

Il traverse la courbe

Il existe une autre expression du rayon de courbure qui sera fréquemment employée et qu'il importe d'indiquer

ici : Soit mn la normale en m, n étant par son second point d'intersection avec le cercle osculateur. Si $m'\mu$ est la perpendiculaire abaissée de m' sur mn, on a d'après la géométrie élémentaire

$$\overline{m\mu} \times \overline{\mu\nu} = \overline{m'\mu}^2$$

on en déduira facilement $2\rho = \lim. \dfrac{\overline{m'\mu}^2}{\overline{m\mu}}$

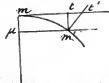
ou simplement $2\rho = \dfrac{\overline{m'\mu}^2}{\overline{m\mu}}$ (1)

en convenant que $m\mu$, $m'\mu$ sont des quantités infinitésimales

---

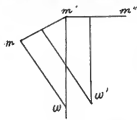
(1) Cette formule n'est pas seulement utile par l'expression qu'elle fournit du rayon de courbure ; elle permet encore de calculer la quantité dont la courbe aux environs du point m s'écarte de sa tangente. Ainsi à un déplacement mm' sur la courbe correspond un écart qui mesuré parallèlement à la normale en m est égal à $m't$ ou $m\mu$. On a donc pour

la valeur de cet écart

$$e = \overline{m\mu} = \frac{\overline{m'\mu}^2}{2\rho} \text{ ou } \frac{\overline{mm'}^2}{2\rho}$$

puisque mm' et $m'\mu$ ne diffèrent que de quantités négligeables

On voit que si mm' est du premier ordre de petitesse l'écart e sera du second, toutes les fois que le rayon de courbure aura une valeur finie. Et il en serait encore de même si l'on mesurait l'écart suivant une oblique pourvu que cette oblique fasse avec la normale un angle différent de 90°.

On voit encore d'après la relation $e = \dfrac{\overline{m'\mu}^2}{2\rho}$ que si deux courbes c, c' ont en m même rayon de courbure la

Enfin on peut encore regarder le centre de courbure comme l'intersection de deux normales consécutives (2). Il

suffit de faire voir que le point d'intersection ω des deux normales a même position limite que le point d'intersection ω' des perpendiculaires élevées sur mm', $m'm''$ en leurs milieux. On y arrivera facilement par des considérations de géométrie infinitésimale.

Direction, diamètre parabole osculatrice

Soit mené par le point m une parallèle à $m'm''$. elle rencontre la courbe en un point dont la distance à m''' peut être négligée à coté des quantités que l'on conservera dans les relations suivantes. On sera donc autorisé à considérer ces deux points comme confondus en un seul.

Cela posé en joignant les milieux i j de $m'm''$, $m\,m'''$ on obtiendra une droite dont la direction jointe aux éléments précédemment définis pourra servir à caractériser

---

Suite (1) quantité $\overline{m'm'_1}$ dont elles s'écartent l'une de l'autre suivant une direction quelconque est au moins du 3ème ordre de petitesse pourvu que la direction choisie diffère de celle de la tangente.

Ces considérations montrent comment on peut revenir de la définition géométrique donnée plus haut pour l'ordre du contact de deux courbes à la définition analytique telle qu'on la trouve par exemple dans le cours de calcul différentiel et intégral de Mr Serret (tome I page 317 et suivantes).

(2) Les normales consécutives sont les perpendiculaires aux cotés du polygone infinitésimal menées par les points consécutifs.

les quatre points consécutifs $m\,m'\,m''\,m'''$.

Cette droite est dite le diamètre de la courbe au point m. C'est la tangente au lieu qu'on obtiendrait en menant à la courbe une série de sécantes parallèles à la tangente en m et en prenant les milieux des points d'intersection de ces sécantes avec les deux branches de courbes $m\mu$, $m\mu'$ situées de part et d'autre de m.(1)

On a appelé déviation la tangente de l'angle que fait le diamètre avec la normale c'est-à-dire la limite de $\frac{\overline{Kj}}{\overline{iK}}$, iK étant perpendiculaire à $m'm''$. La raison de cette dénomination se trouve dans l'observation suivante.

Si l'on considère le point f où le cercle des trois points $m\,m'\,m''$ coupe $m\,m'''$, on a évidemment

$$\overline{fm'''} = 2\,\overline{Kj}$$

Donc la déviation a pour valeur :

$$tg.\delta = \frac{\overline{fm''}}{2\,\overline{Ki}}$$

Or en appelant ε l'angle de contingence, et en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur on trouve

$$2\rho\,\overline{Ki} = \overline{mi}^2 = \frac{9}{4}\,\overline{mm'}^2$$

Donc

$$tg\delta = \frac{4\rho}{9\,\overline{mm'}^2}\,\overline{fm'''}$$

C'est-à-dire que pour toutes les courbes ayant en m même rayon de courbure la déviation est proportionnelle à la quantité dont ces courbes s'écartent du cercle osculateur parallèlement à la tangente.

Soit une parabole passant par les quatre points consécutifs $m\,m'\,m''\,m'''$: Cette parabole est la parabole

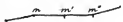
---

(1) Ce lieu peut être dit Courbe Diamétrale

osculatrice à la courbe en m. Elle a en ce point même tangente, même courbure et même diamètre que la courbe. Une parabole étant déterminée par quatre points, on voit que la parabole osculatrice est bien de toutes les paraboles passant en m celle qui a en ce point le contact le plus intime avec la courbe (1)

L'étude que l'on vient de faire des courbes planes, en déterminant en chacun de leurs points des éléments caractéristiques tels que la tangente, la courbure, le diamètre, et en comparant ces courbes à des courbes connues, pourrait être évidemment poussée plus loin. On pourrait par exemple en passant au système cinq points consécutifs considérer en un point d'une courbe la conique osculatrice, et le centre de cette conique, qui serait d'ailleurs un point du diamètre, pourrait joint aux éléments précédents servir à caractériser la manière dont en un point donné la déviation varie. Mais on n'insistera pas davantage sur ces considérations et l'on se bornera pour terminer ce qui doit être dit des courbes planes à rappeler ici la définition de leurs points singuliers et à donner quelques notions sommaires sur la théorie des enveloppes et sur celle des développées.

Points singuliers, et points remarquables.

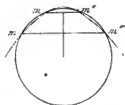
On dit qu'un point d'une courbe plane est un point remarquable lorsque les points consécutifs situés dans son voisinage présentent l'une des dispositions particulières suivantes:

$m \quad m' \quad m''$ 1° Trois points consécutifs en ligne droite: le point est dit point d'inflexion, l'angle de contingence change de

---

(1) Il y a en général deux paraboles passant par quatre points; il n'y en a qu'une si les quatre points forment un trapèze, parce qu'alors la seconde solution est donnée par le système des deux côtés parallèles du trapèze

(2) On trouvera dans la note 6 de l'appendice plusieurs exemples de la détermination du rayon de courbure et du diamètre dans les courbes planes

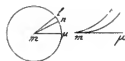
sionnes en passant par o : le rayon de courbure est infini ; la tangente a un contact du second ordre avec la courbe et la traverse.

2°. Quatre points consécutifs sur un cercle : le point est dit sommet. La variation de l'angle de contingence est nulle cet angle passe par un maximum ou minimum relatif. et il en est de même du rayon de courbure $\rho = \frac{mm'}{\varepsilon}$, puisque mm' est constant.

La déviation est nulle aux sommets : le cercle osculateur n'y traverse pas la courbe avec laquelle il a un contact du troisième ordre.

On appelle plus spécialement points singuliers les points de rebroussement, les points anguleux, les points d'arrêt, les points isolés et les points multiples.

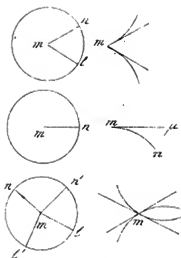
Décrivons un cercle du point m comme centre avec un rayon égal au côté du polygone infinitésimal inscrit dans la courbe : ce cercle passera par les deux points l et n infiniment voisins de m, et si le point m n'est pas un point singulier, l'arc ln différera infiniment peu d'une demi-circonférence (1).

Si cet arc tend vers o, le point est dit de rebroussement.

Si les deux directions mn, ml tendent vers leur limite commune en restant situées de part et d'autre de cette limite, le rebroussement est dit de première espèce : il est de seconde espèce dans le cas contraire.

Le rayon de courbure changeant de direction aux rebroussements de première espèce, sa valeur doit y être en général ou nulle ou infinie ; il n'en est pas de même aux rebroussements de seconde espèce et l'étude des développées servira d'expliquer cette différence.

Si l'arc ln a pour limite une valeur quelconque différente de o et de π, le point est dit point anguleux ou

---

(1) Cette différence qui est en général du second ordre si ml est du premier, devient au moins du troisième ordre pour les points d'inflexion.

point saillant, il y a en ce point deux tangentes distinctes.

Si le point n n'existe pas et que le cercle ne coupe la courbe qu'en un seul point, on a un point d'arrêt.

Si le cercle ne rencontre la courbe en aucun point le point m est un point isolé.

Enfin si le cercle coupe le polygone infinitésimal en plus de deux points, le point est dit point multiple.[1]

Foyers. Centres. Droites diamétrales. Axes.

On appelle foyers d'une courbe plane les points d'intersection de deux tangentes qui passent par les deux points imaginaires d'un cercle situés à l'infini. Si la courbe est de la $n^{ème}$ classe, elle aura donc n foyers réels, n^2-n foyers imaginaires.

On appelle centre d'une courbe un point tel que tous les points de la courbe soient relativement à ce point, deux à deux symétriques : une courbe ne peut avoir plus d'un centre : toute branche de courbe qui passe par un centre y a un point d'inflexion.

On a vu que le diamètre d'une courbe plane en l'un de ses points était la tangente à la courbe diamétrale qui passe en ce point. Cette courbe diamétrale, lorsqu'elle se réduit à une simple droite est souvent désignée elle-même sous le nom de diamètre : nous l'appelerons droite diamétrale pour éviter toute confusion.

Une droite diamétrale perpendiculaire à ses cordes conjuguées est un axe ; ses points d'intersection avec la courbe sont des sommets.

Si une courbe n'admet que deux droites diamétrales, ces droites sont conjuguées et leur point d'intersection est centre de la courbe.

Si une courbe admet plus de deux droites diamétrales, ces droites passent toutes par un même point et détachent des secteurs égaux dans une certaine conique qui a son centre en ce point (Wantzel)[2]

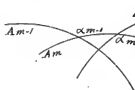
Ces théorèmes remarquables, ainsi que d'autres, sur les diamètres harmoniques seront démontrés dans la note 9 de l'Appendice.

---

[1] Les points d'intersections sont alors toujours en nombre pair si la courbe est algébrique, et il y a autant de tangentes qu'il y a de couples de points, c. à. d. de branches de courbes. Les points anguleux et les points d'arrêt ne se présentent que dans le cas des courbes transcendantes.

[2] Dans le cas où cette conique est une ellipse, les diamètres sont les rayons d'un polygone semi-régulier, projection d'un polygone régulier du cercle (Transon, Virgon). Si les diamètres sont en nombre pair, ils sont conjugués deux à deux, et leur point d'intersection est centre de la courbe.

Enveloppes et enveloppées.

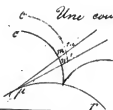
Soit une courbe plane[1] se déplaçant dans son plan et $A_1 A_2 \ldots A_{m-1}\ A_m\ A_{m+1} \ldots$ des positions successives appelons α_m l'un des points d'intersection de A_m avec A_{m+1} : parmi les points où A_{m-1} coupe A_m, il doit y en avoir un infiniment voisin de α_m. Car si l'on donne à A_{m-1} et A_m la déformation et les déplacements infiniment petits qui les amènent en $A_m\ A_{m+1}$, il y aura un de leurs points d'intersection qui viendra en α_m et cela par un déplacement infiniment petit en général.

A_{m-1} α_{m-1} A_{m+1} α_m A_m

On aura ainsi sur la série des courbes $A_1 A_2 \ldots A_{m-1}$. $A_m\ A_{m+1}$ une série de points d'intersection $\alpha_1 \alpha_2$ — $\alpha_{m-1}\ \alpha_m$. infiniment voisins les uns des autres et dont l'ensemble formera une courbe B qui est dite l'enveloppe des courbes A.

Réciproquement les courbes A sont les enveloppées de la courbe B.

On voit que toutes les enveloppées sont tangentes à leur enveloppe.

Les enveloppées peuvent d'ailleurs toucher leur enveloppe en plusieurs points à la fois. L'enveloppe peut aussi se composer de plusieurs courbes géométriquement distinctes.

Développantes et développées

Une courbe Γ étant donnée, si une tangente roule sans glisser sur cette courbe, un point m quelconque de cette tangente décrit une trajectoire C qui est dite développante de la courbe donnée[2]

C C' m m' μ Γ

(1) La forme de cette courbe n'est pas supposée invariable.
(2) La développante peut être considérée comme décrite par

Réciproquement la première courbe est la développée de la seconde.

La développante est normale en m à la direction $m\mu$ car le mouvement infiniment petit du point m est dû à une simple rotation autour de μ.

Une même développée a une infinité de développantes toutes ces courbes sont orthogonales à une même série de droites sur les quelles elles interceptent des longueurs égales. Ce sont si l'on veut des Courbes parallèles.

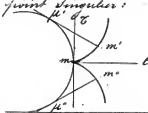
La développée est le lieu des centres de courbure de l'une quelconque de ses développantes : elle est l'enveloppe de leurs normales.

Valeur de la courbure aux points singuliers

Ces observations permettent d'éclaircir & de compléter ce qui a été dit au sujet de la courbure aux points singuliers des Courbes planes

On remarquera qu'en général :

1° à un point de rencontre de la développante avec sa Développée[1] correspond un rebroussements de première espèce de la développante si toutefois le point de la développante n'est pas un point singulier :

μ' τ m' m t m_0 μ''

Le rayon de courbure $m\mu$ devient alors nul & change de signe en passant par 0.

(2) (Suite) L'extrémité d'un fil flexible qui d'abord enroulé sur la courbe I' se déroulerait en restant constamment tendu de là le nom donné à cette courbe.

(1) Il s'agit ici bien entendu des points de rencontre de la développante avec la portion de la développée qui lui correspond : Voir l'exemple de l'Ellipse.

2° À un point à l'infini de la développée correspond un point d'inflexion de la développante si toutefois le point à l'infini n'est pas un point singulier.

Le rayon de courbure change de signe en passant par l'infini.

3° À un point d'inflexion de la développée correspond en général un rebroussement de seconde espèce de la développante le rayon de courbure a en ce point une valeur finie.

4° À un rebroussement de première espèce de la développée correspond un sommet de la développante.

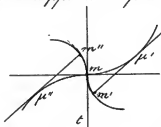
Car le rayon de courbure passe par un minimum, ce qui est comme on l'a vu plus haut une propriété caractéristique du sommet (1)

5° À un rebroussement de seconde espèce de la développée correspond un rebroussement de seconde espèce de la développante ; ce point doit être en outre considéré comme un sommet, puisque la dérivée du rayon de courbure s'y annulle.

6° À un point d'arrêt ou à un point anguleux de la développée correspond un point d'arrêt ou une solution de continuité dans la développante.

(1) Il en est encore de même si le point de rebroussement de 1re espèce de la développée est un point à l'infini : le rayon de courbure est alors infini, mais sans changer de signe : c'est un maximum

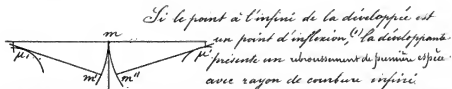
Exceptionnellement.

Si le point de rencontre de la développante avec sa développée est un point d'inflexion de celle ci, la développante présente cette circonstance singulière qu'elle traverse sa tangente, et a un rayon de courbure nul.

En se reportant à l'expression $\rho = \frac{mm'}{\mathcal{E}}$ on voit que mm' devient infiniment petit par rapport à $\mathcal{E}$ - $\mathcal{E}$ étant d'ailleurs du second ordre, par rapport à l'élément de développée. L'élément mm' de développante est au moins du troisième ordre.

Si l'on convient d'étendre la dénomination de point d'inflexion à tous les points d'une courbe où le rayon de courbure change de signe sans qu'il y ait rebroussement, on devra appeler.

1° Points d'inflexion de première espèce les points d'inflexion précédemment étudiés où le rayon de courbure change de signe en passant par l'infini - mm' étant alors du 1er ordre de petitesse, $\mathcal{E}$ est du second.

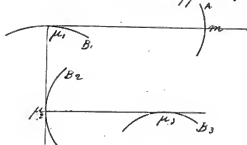
2° Points d'inflexion de seconde espèce les points d'inflexion où le rayon de courbure change de signe en passant par zéro, en ces points $\mathcal{E}$ étant du second ordre de petitesse, mm' est du troisième.

Si le point à l'infini de la développée est un point d'inflexion,[1] la développante présente un rebroussement de première espèce avec rayon de courbure infini.

[1] On se servira utilement pour reconnaître la nature des points à l'infini d'une transformation perspective.

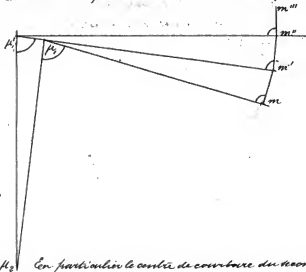
Enfin si le point à l'infini sur la développée est un point de rebroussement de seconde espèce, la développante présente un rebroussement de seconde espèce avec rayon de courbure infini.

On croit superflu de pousser plus loin cette étude. On a commencé par donner avec la définition des points singuliers la valeur générale de la courbure en ces points, puis après avoir défini les développées on s'est servi de la considération de ces courbes pour étudier les principaux cas exceptionnels qui peuvent se présenter : il sera généralement facile de traiter d'une manière analogue les cas plus complexes encore qu'on pourrait avoir à résoudre.

Centres de Courbure Successifs

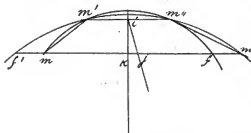
La notion des développées et des développantes conduit naturellement à celle des Centres de Courbure successifs.

La développée B_1 lieu des centres de courbure de A ou enveloppe de ses normales, a elle même une développée B_2 qui pourra être considérée comme la développée de second ordre de A ; μ_2 sera le centre de courbure du second ordre, et ainsi de suite.

En substituant à la courbe A un polygone infinitésimal les développées successives se trouvent aussi remplacées

par des polygones (1), et l'on voit que le centre de courbure d'ordre n est déterminé par la connaissance de $n+2$ points de la courbe (2)

En particulier le centre de courbure du second ordre pourra être considéré comme élément caractéristique pour quatre points consécutifs de la courbe donnée. Cherchons donc la relation qui exist. entre ce point et le diamètre tel qu'il a été précédemment défini

(1) Ces polygones n'ont pas leurs côtés égaux comme ceux considérés jusqu'à présent, mais les considérations sur lesquelles on s'appuie dans ce paragraphe sont indépendantes de cette propriété

(2) ou plus généralement par la connaissance de $n+2$ éléments consécutifs de la courbe donnée, en appelant indifféremment éléments les points ou les tangentes, c'est-à-dire les sommets ou les côtés du polygone infinitésimal : il faut remarquer que si l'on connaît $n+2$ tangentes on ne connaît que $n+1$ points et réciproquement, mais au point de vue de la détermination des développées il y a équivalence

Pour cela reprenons la figure de la page 13 et l'expression $tg\,\delta = \frac{Ki}{iK}$

Faisons passer par $m'm'\,m''$, $m'm''m''$ les deux cercles osculateurs consécutifs, qui rencontrent $m\,m'''$ en $f\,f'$. Ces deux cercles ont leurs centres sur $i\,K$ et $fm''' = f'm$. On admet sans erreur sensible en appelant ρ, et $\rho + d\rho$ leurs rayons

$$\rho = \frac{\overline{Km'''}^2}{2\,iK} = \frac{\overline{Km'''}^2\,tg\,\delta}{fm'''}$$

$$\rho + d\rho = \frac{\overline{Km}^2}{2\,iK} = \frac{\overline{Km}^2\,tg\,\delta}{fm'''}$$

$$d\rho = \frac{tg\,\delta}{fm'''}\left(\overline{Km'''}^2 - \overline{Km}^2\right) = mm'''\,tg\,\delta \quad (1)$$

On en conclut ; comme $d\rho = \mu_1\mu_1'$

$$tg\,\delta = \frac{\mu_1\mu_1'}{3\,mm'}$$

C'est-à-dire $tg\,\delta = \frac{\rho_2}{3\rho_1}$ (2)

---

(1) Cette formule montre que conformément à ce que nous avons annoncé si quatre points consécutifs sont sur un même cercle, ce qui est le caractère des sommets, la dérivée du rayon de courbure s'annule.

(2) L'angle de contingence étant le même pour toutes les développées consécutives les rayons de courbure consécutifs sont entre eux comme les cotés infinitésimaux mm', $\mu_1\mu_1'$, $\mu_2\mu_2'$ &c que nous désignerons par $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, en les considérant comme des accroissements différentiels d'arcs de courbes, ces cotés infinitésimaux (voir la figure de la page précédente)

Telle est la relation cherchée, elle prouve que si sur le rayon de seconde courbure on prend $\mu_1 h = \frac{1}{3} \mu_1 \mu_2$, la déviation est en valeur absolue la cotangente trigonométrique de l'angle $\mu_1 m h$, il suffit d'ailleurs de se reporter au cas de la parabole pour reconnaître que le diamètre n'est pas mh mais son symétrique md par rapport à la normale

On peut encore remarquer que si l'on mène aux points consécutifs d'une courbe une série d'obliques faisant avec la courbe un angle constant quelconque, les points où ces obliques touchent leur enveloppe sont les projections de μ sur leurs directions : si l'on convenait d'appeler les points ainsi obtenus centres de courbure oblique de la courbe A, on aurait ce théorème, le lieu des centres de courbure oblique est le cercle décrit sur le rayon de courbure comme diamètre

Si l'on considère la série des cercles décrits sur les rayons de courbure comme diamètres il est facile de voir que ces cercles ont pour enveloppe d'abord la courbe A qu'ils touchent

---

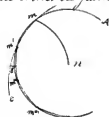
Suite (2) peuvent aussi être considérés comme des accroissements différentiels de rayons de courbure, à ce point de vue on peut dire que chaque rayon de courbure est la dérivée du rayon de courbure d'ordre immédiatement inférieur par rapport à l'angle dont l'angle de contingence est la différentielle

en m, m' etc, puis une seconde courbe c qu'ils touchent en leurs points d'intersection w avec les droites telles que $m\mu_2$: ces points offrent un intérêt spécial : ce sont les pôles de spirales logarithmiques ayant en m quatre points consécutifs communs avec la courbe c.

Les propriétés des courbes planes qui ont été indiquées dans cette courte étude se rapportent toutes à des points infiniment voisins et sont dues au principe de continuité dont nous avons déjà signalé l'importance. D'autres propriétés aussi générales et tenant à la permanence d'une même relation (1) pour les différentes parties d'une même courbe ont été signalées par Newton, Maclaurin et Cotes et leur étude reprise par les géomètres modernes a fourni un certain nombre de beaux théorèmes qui s'étendent aux courbes gauches et aux surfaces. La note 9 de l'appendice renferme les énoncés de quelques uns de ces théorèmes.

2° Courbes Sphériques

L'étude qui vient d'être faite des courbes planes peut s'appliquer presque entièrement aux courbes sphériques, avec ce seul changement qu'on y remplace les droites par les grands cercles de la sphère.

Ainsi une courbe sphérique quelconque pourra être considérée comme la limite d'un polygone infinitésimal formé par une série d'arcs de grands cercles à longueur égale se coupant sur la courbe.

La tangente, la normale à la courbe en l'un de ses points m deviendront le grand cercle qui joint le point m au point infiniment voisin m', et le grand cercle mn perpendiculaire.

L'angle de contingence sera l'angle E de deux grands cercles tangents.

---

(1) Quelconque d'ailleurs

Cours de Géométrie - Ch. Lucy.

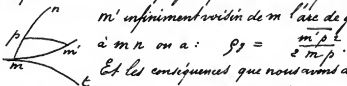
consécutifs.

La Courbure sera mesurée par le rapport de l'angle de contingence à la longueur du coté $m m'$. Cet élément qu'on désigne sous le nom de Courbure Géodésique pour le distinguer de la courbure absolue qui sera définie plus loin, dépend uniquement de trois points consécutifs $m\,m'\,m''$ et aura par conséquent même valeur pour toute courbe passant par ces trois points. Considérons en particulier le petit cercle intersection de la sphère avec le plan $m\,m'\,m''$: ce cercle sera dit Cercle de Courbure géodésique de la courbe, son pole sera le pole de courbure géodésique

Et si l'on détermine le point S sommet du cone touchant la sphère tout le long de ce cercle, l'angle $m\,s\,m'$ étant égal à ε, Sm sera précisément égal à l'inverse $\frac{mm'}{\varepsilon}$ de la courbure géodésique c'est à dire au rayon de courbure géodésique ρg de A

La Courbure géodésique est constante en tous les points d'un même cercle.

Elle peut varier depuis 0 qui est la courbure d'un grand cercle jusqu'à l'infini qui est la courbure d'un cercle de rayon nul c'est à dire d'un point.

La courbure géodésique est susceptible d'une expression toute semblable à celle qui a été donnée à la page 11 pour les courbes planes : si l'on abaisse du point m' infiniment voisin de m l'arc de grand cercle $m'p$ perpendiculaire à mn on a : $\rho g = \frac{m'p^2}{2\,mp}$.

Et les conséquences que nous avons déduites de la formule analogue dans le plan pourront être étendues aux courbes sphériques.

Enfin la définition du diamètre et de la déviation dans les courbes sphériques pourra se calquer sur celle relative aux courbes planes

Enveloppes et enveloppées sphériques. Developpantes et développées sphériques : On est naturellement conduit à leur considération par la continuation de l'extension précédente.

Les principales propriétés des développées planes appartiennent aux développées sphériques. Elles sont le lieu des poles de courbure géodésique, et l'on reconnaîtra facilement que comme dans les courbes planes, la développante est la courbe décrite par l'extrémité d'un fil flexible qui d'abord enroulé sur la développée se déroulerait ensuite en restant constamment tendu sur la sphère.

Appendice.

École Polytechnique
1re année d'Études
1870-1871.

Cours de Géométrie descriptive
Deuxième Section.

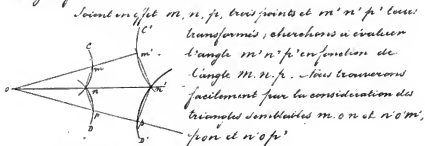
M. Haag, Ingénieur des Ponts & Chaussées
Chargé du cours

Appendice [1]

Note 1.

Sur le mode de la transformation par rayons vecteurs réciproques

La propriété de la conservation des angles attribuée à la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques doit être évidemment restreinte aux angles sous lesquels les lignes se coupent. Ainsi il ne serait pas exact de dire que l'angle sous lequel on voit d'un point donné deux autres points de la figure reste le même après transformation. En outre la proposition n'est vraie que pour des angles finis.

Soient en effet m, n, p, trois points et $m' n' p'$ leurs transformés ; cherchons à évaluer l'angle $m' n' p'$ en fonction de l'angle $m. n. p$. Nous trouverons facilement par la considération des triangles semblables $m. o\, n$ et $n' o\, m'$, $p\, o\, n$ et $n' o\, p'$

$$m' n' p' = m n p - m o p$$

Supposons maintenant que $m\, n$, $n\, p$ soient les sécantes à deux courbes $C. D$, qui se coupent en n et que l'angle $m\, o\, p$ diminue de plus en plus à la limite m, n, $n\, p$ deviennent les tangentes à C, D $m' n'$, $n' p'$ sont alors les tangentes aux transformées $C' D'$, et l'on voit que l'angle de ces deux tangentes

---

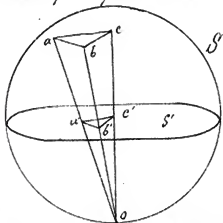
[1] Les notes renfermées dans cet appendice ne faisant point corps avec les leçons proprement dites, on y supposera connu l'ensemble du cours.

est égal à celui des deux premières diminué de l'angle infiniment petit $m\,o\,p$, qui sera négligeable toutes les fois que les courbes considérées se coupent sous un angle fini.

Ce qui vient d'être dit pour l'angle de deux courbes dans la transformation d'une figure plane s'étend d'ailleurs sans difficulté à l'angle de deux surfaces dans la transformation des figures à trois dimensions.

On en conclut que dans la transformation des surfaces les lignes de Courbure restent lignes de Courbure (1)

La méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques trouve dans le tracé des cartes géographiques une importante application. Nous voulons parler des projections stéréographiques.

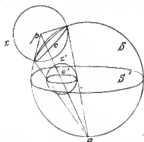
On appelle projection stéréographique d'une figure sphérique, la perspective de cette figure faite sur un plan diamétral S' de la sphère en prenant pour point de vue le pôle O de ce plan diamétral. Or il est facile de voir que la perspective ainsi obtenue n'est qu'une transformée de la première figure par rayons vecteurs réciproques.

Toutes les propriétés de ce mode de transformation appartiennent donc à la projection stéréographique, et l'on comprend que dans l'application au tracé des cartes, la conservation des angles, et des cercles soit d'une très grande importance.

Remarquons en outre que le sommet du Cone circonscrit à

---

(1) Car l'on peut toujours considérer les lignes de Courbure d'une surface comme données par l'intersection d'un système triplement orthogonal, et qui reste triplement orthogonal dans la transformation.

la sphère suivant un petit cercle quelconque c venue en le joignant au pôle o le centre du cercle transformé c'.

En effet considérons le petit cercle comme intersection de la sphère S avec une autre sphère Σ de centre p. les deux sphères transformées l'une le plan diamétral S', l'autre une certaine sphère Σ' dont l'intersection avec le plan S' est le cercle c', mais les deux premières sphères sont orthogonales entre elles ; donc la sphère Σ' orthogonale au plan S' a son centre sur ce plan, et comme ce centre doit se trouver sur le rayon op, ce sera le point où ce rayon perce le plan de la projection stéréographique.

Mentionnons pour terminer cette note deux importants théorèmes :

La méthode des rayons vecteurs réciproques est, avec l'homothétie ordinaire, le seul procédé de transformation qui conserve la similitude infinitésimale des figures à trois dimensions[1] (Liouville, Haton)

Lorsqu'on fait subir à une figure quelconque une série de transformations par rayons vecteurs réciproques, la figure résultante peut toujours être obtenue au moyen d'un pôle et d'une puissance unique[2] (Liouville)[3]

Note 2.

Sur les Méthodes mécaniques.

Nous nous bornerons à indiquer ici le principe et les premières applications de ces méthodes sur lesquelles nous aurons à revenir plus loin (Note 6, page 60)

Méthode de Roberval pour le tracé des tangentes. Cette méthode est l'application du principe suivant :

---

(1) Il n'en est pas de même pour les figures planes (Voir plus loin Note 7)

(2) On appelle puissance le produit constant des rayons vecteurs.

(3) On retrouvera dans la suite de ces notes de nombreuses applications de la transformation par rayons vecteurs réciproques : cette méthode si importante et si féconde a eu son point de départ dans les travaux de Bellavitis, Thomson, Stubbs et Liouville.

La vitesse d'un point mobile est dirigée suivant la tangente à la courbe qu'il décrit.

Le problème de la tangente à une courbe sera donc résolu si l'on détermine la vitesse du point décrivant la courbe. Mais cette détermination de vitesse pourra être facilitée par la décomposition du mouvement en deux ou plusieurs mouvements composants dont les vitesses pourront être très faciles à trouver et seront ensuite composées entre elles.

Exemples :

1°. Tangente à la cycloïde — Considérons le mouvement du cercle générateur comme résultant de la composition de deux mouvements simultanés, rotation autour de o, translation de o parallèlement à xy : pour qu'il y ait roulement sans glissement, il faudra que les vitesses mu, mu' du point m dans ces deux mouvements soient égales. La résultante mv est donc la bissectrice de l'angle umu', c.a.d. qu'elle passe par l'extrémité a' du diamètre oa.

2°. Tangente à l'ellipse — Le point m décrivant l'ellipse peut être considéré comme glissant sur le rayon fm, pendant que celui-ci tourne autour du foyer f. Ces deux mouvements donneront lieu aux vitesses composantes mu suivant fm et mw perpendiculaire à fm, dont mv sera la résultante. Mais on peut également supposer le point glissant sur $f'm$ et tournant autour de f'; cette nouvelle hypothèse donnera les vitesses composantes mu', mw', la première suivant mf', l'autre perpendiculaire à ce rayon, et ces vitesses devront par leur composition reproduire mv. On voit donc que mu, mu' sont les projections orthogonales de mv sur les deux rayons vecteurs. Mais ces projections sont égales puisque, d'après la définition de l'ellipse, la somme $mf + mf'$ devant être constante, l'un des rayons doit s'allonger de la quantité même dont se raccourcit l'autre. Donc mv est la bissectrice de l'angle des rayons vecteurs.

Raisonnement tout analogue pour l'hyperbole.

Extension à la parabole considérée comme cas limite.

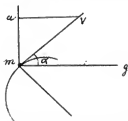
Méthode mécanique pour la détermination des courbures

Cette méthode est l'application du principe suivant.

La composante normale de l'accélération d'un point est égale au carré de sa vitesse divisé par le rayon de courbure de la trajectoire. Le problème du rayon de courbure d'une courbe sera donc résolu si l'on trouve la vitesse et l'accélération du point décrivant. Cette recherche pourra être facilitée par l'application de la règle de mécanique qui donne l'accélération

résultante de plusieurs mouvements simultanés.

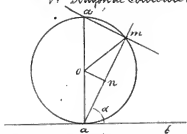
Exemples :

1° Rayon de Courbure de la Parabole. La parabole peut être considérée comme engendrée par un point dont la vitesse initiale est quelconque et qui est animé d'une accélération constante en grandeur et en direction. Cette direction est celle de l'axe de la parabole. Soit m.v la vitesse au point m., m g l'accélération ;

Si α est l'angle de la tangente avec m g, $\overline{mg}\,\mathrm{Sin}\,\alpha$ sera l'accélération normale. Le rayon de courbure sera donc $\rho = \dfrac{\overline{mv}^2}{\overline{mg}\,\mathrm{Sin}\,\alpha}$

Mais la vitesse m.v ne recevant que des accroissements dirigés suivant m.g. sa projection m.u. sur la direction perpendiculaire à m.g est constante on a donc

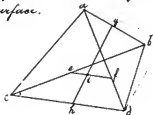
$$\rho = \frac{\overline{mu}^2}{\overline{mg}} \times \frac{1}{\mathrm{Sin}^3\alpha} = \frac{K}{\mathrm{Sin}^3\alpha}$$

C'est-à-dire que le rayon de courbure est proportionnel à l'inverse du cube du Sinus que fait la tangente avec l'axe.

2° Rayon de Courbure de la Cycloïde. Décomposons comme précédemment le mouvement du point décrivant la cycloïde en un mouvement de rotation autour de O et un mouvement de translation parallèle à a b. L'accélération du point m sera uniquement due au mouvement de rotation : elle sera dirigée suivant o m et égale à $\omega^2 r$, si ω est la vitesse de rotation. Supposons $\omega = 1$ et appelons α l'angle m a b, la vitesse de m sera d'après ce qui a été vu dirigée suivant a'm et égale à $2r\,\mathrm{Sin}\,\alpha$ ou a m. L'accélération normale sera $mn = \frac{am}{2}$

On aura donc pour le rayon de courbure $\rho = \dfrac{\overline{am}^2}{\frac{\overline{am}}{2}} = 2\,am$.

(Appendice). Cours de Mr. Haag 2e Division. — (Cours de Géométrie)

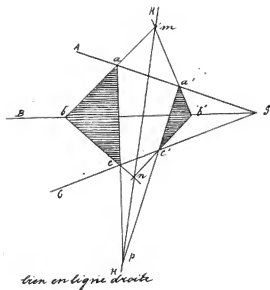
Ces méthodes, on le comprend aisément, pourraient s'étendre à la recherche des éléments qui comme le diamètre servent à définir une courbe en l'un de ses points d'une façon plus intime encore que le cercle de courbure. Nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet, mais nous citerons encore comme exemple de méthode mécanique l'application de la théorie des centres de gravité à un problème de géométrie :

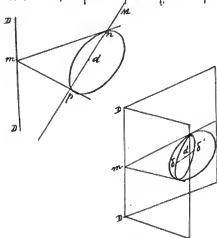
Soit un quadrilatère gauche a b c d formé par quatre génératrices d'un paraboloïde. Si l'on mène les diagonales a d, b c, et qu'on joigne leurs milieux e f, le milieu i de cette droite e f sera un point de la surface.

En effet ce point peut être considéré comme le centre de gravité de quatre poids égaux appliqués aux quatre sommets. Mais ces poids peuvent se composer ensemble d'une autre manière, en prenant les milieux g h de a b, c d et le milieu de la droite g h. Donc la droite g h passe en i, or, g h est une génératrice de la surface. Donc.... etc

Note 3

Sur l'interprétation des figures planes par la géométrie à trois dimensions.

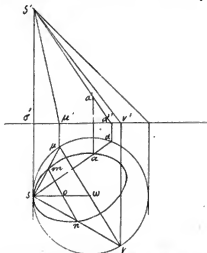
Voici quelques applications de cette méthode :

1° Étant donnés dans le plan deux triangles a b c, a' b' c', tellement placés que les droites a a', b b', c c' concourent en un même point S, les points de concours m n p de leurs côtés correspondants sont en ligne droite.

Considérons la figure comme la projection d'un trièdre S (ABC) de l'espace dans lequel deux plans sécants P P' détermineraient les sections a b c, a' b' c'. Il est aisé de voir que les droites telles que a b, a' b' intersections des plans P, P' avec une même face A S B du trièdre iront se rencontrer sur l'intersection H des plans P P'. Donc les trois points m n p. situés sur cette droite H sont bien en ligne droite

2° Étant donnée une ellipse et un point m, si le point m décrit une droite D, sa polaire passe par un point fixe d.

En effet considérons l'ellipse donnée comme la section principale d'un ellipsoïde dont le 3ème axe serait perpendiculaire au tableau et menons par la droite D du tableau les deux plans tangents à cet ellipsoïde. Ces plans toucheront en δ δ' la surface et à cause de la symétrie de la figure, la droite δ δ' sera perpendiculaire au tableau. D'ailleurs nous pouvons considérer l'angle n m p comme la projection d'un cône mené du point m tangentiellement à l'ellipsoïde. La ligne de contact de ce cône sera située dans un plan perpendiculaire au tableau et se projettera sur n p. mais cette ligne de contact passe en δ δ', sa trace passe donc au point d où δ δ' perce le tableau et comme ce point

est indépendant de la position du point m sur la droite D, le théorème est démontré.

3° Un angle droit tournant autour d'un point d'une conique, sa corde passe par un point fixe.

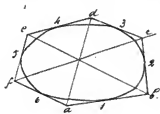
Soit S le point donné et C la conique ; traçons une circonférence quelconque tangente à la conique en S et considérons cette circonférence comme la base d'un cône oblique dont le sommet situé sur la verticale du point S se projetterait verticalement en S'.

Il est facile de relever au moyen de la génératrice Sa, $S a'$ un point du cône dont la projection horizontale a est donnée et dont la projection verticale sera a'. Relevons ainsi sur le cône trois points quelconques $a\,b\,c$ de la conique et considérons le plan P passant par les trois points ainsi relevés. ce plan coupera le cône suivant une conique dont la projection horizontale passant par $a\,b\,c$ et tangente en S à la conique donnée devra se confondre avec cette courbe.

Cela posé, soit $m\,S\,n$ une position de l'angle droit tournant autour de S. Considérons les côtés de cet angle comme les projections horizontales des deux génératrices suivant lesquelles le cône est coupé par un plan Q passant par son sommet, et dont $\mu\,\nu$ serait la trace horizontale : $m\,n$ sera en projection horizontale la trace du plan Q sur le plan P. Or l'angle $\mu\,S\,\nu$ étant droit, $\mu\,\nu$ passe constamment par le centre ω du cercle. Donc le plan Q dans ses différentes positions ne fait que pivoter autour de la droite fixe $S\,\omega$ $S'\omega'$. Donc sa trace $m\,n$ sur le plan P passe constamment par un point fixe qui est celui où la droite $S\,\omega$ $S'\omega'$ perce ce plan.

On voit par la démonstration que ce point fixe est situé sur la normale en S à l'ellipse.

On démontrera d'une façon tout analogue un autre théorème dont voici l'énoncé : Si un angle variable ayant une bissectrice fixe a son sommet en un point d'une conique sa corde passe par un point fixe (1)

4° Théorème de Brianchon. Un hexagone étant circonscrit à une ellipse, ses trois diagonales se coupent en un même point.

Considérons la courbe donnée comme l'ellipse de gorge d'un hyperboloïde à une nappe et l'hexagone comme la projection sur le plan de l'ellipse d'un hexagone gauche formé sur la surface par une série de génératrices alternativement de premier et de second système (les côtés impairs se rapportant à un système, les côtés pairs à l'autre. Deux génératrices de système différent étant toujours dans un même plan. Les

génératrices opposées 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6 déterminent trois plans dont les diagonales de l'hexagone sont en projection les intersections respectives. Ces trois diagonales passent donc par un même point.

Ce théorème s'étend immédiatement par transformation perspective à toutes les sections coniques (2)

Figures planes considérées comme cas limites

C'est ici le lieu de mentionner un mode de démonstration qui a quelques rapports avec le précédent bien qu'il en diffère dans son principe.

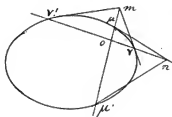
---

(1) Ces deux théorèmes ne sont d'ailleurs que des cas particuliers d'un théorème plus général dépendant de la théorie de l'involution, et dont on trouvera l'énoncé plus loin

(2) Le théorème de Pascal peut se démontrer d'une façon semblable par la considération des couples de plans 1, 2 et 4, 5. 2, 3 et 5, 6 3, 4 et 6, 1. Ces couples de plans ont leurs intersections respectives dans un même plan Q. Donc les traces de ces plans se coupent deux à deux sur une même droite qui est la trace du plan Q. Mais ces traces sont les côtés opposés d'un hexagone inscrit, donc ...... etc.

Cours de Mr Haag. Géométrie descriptive (Appendice) 3e Livraison

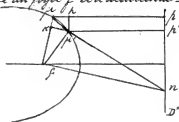
Ce procédé consiste à démontrer les théorèmes de la géométrie plane en considérant les figures planes comme cas limites de figures à 3 dimensions infiniment aplaties

Prenons par exemple une ellipse et soit un point O que nous supposerons pour fixer les idées situé à l'intérieur de la courbe. Menons par O deux droites conjuguées c'est-à-dire passant l'une par le pole de l'autre et considérons en particulier l'une de ces droites om et son pole n (1). Si nous regardons l'ellipse comme un ellipsoïde infiniment aplati $\mu\mu'$ sera la courbe de contact du cône de sommet n tangent à l'ellipsoïde, no sera une génératrice de ce cône, donc les directions om on seront conjuguées en o par rapport à l'indicatrice du point o. Ainsi tous ces couples de droites conjuguées qui passent en un point o sont diamètres conjugués d'une même conique : il y a donc en chaque point deux directions conjuguées rectangulaires.

La considération des ombilics fera voir qu'il y a toujours deux points situés sur le grand axe pour lequel la conique considérée étant un cercle toutes les droites conjuguées sont rectangulaires entre elles : il est facile de déduire de là toutes les propriétés importantes de ces points remarquables qui ne sont autres que les foyers de l'ellipse (2)

---

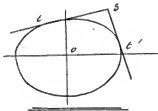
(1) rappelons que le triangle mon dont chaque sommet est le pole du côté opposé est dit triangle conjugué par rapport à la conique

---

(2) Démontrons par exemple que le rapport des distances d'un point de la courbe au foyer f et à la directrice DD' (polaire du foyer) est constant

Considérons la tangente μn comme joignant deux points infiniment voisins $\mu\mu'$ de la courbe. Abaissant $\mu'K$ $\mu'h$ respectivement perpendiculaires sur μf, μp les triangles $nf\mu$, $\mu'K\mu$

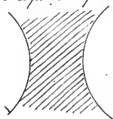
Autre exemple :

Soit un angle droit circonscrit à l'ellipse. Étant démontré comme dans le cours que le lieu des points où les génératrices d'un hyperboloïde sont rectangulaires est l'intersection de la surface avec une sphère de même centre et de rayon $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$, considérons l'ellipse donnée comme un hyperboloïde infiniment aplati et nous verrons immédiatement que le lieu du sommet de l'angle droit est un cercle décrit avec $\sqrt{a^2 + b^2}$ comme rayon et concentrique à l'ellipse

---

Suite (2) rectangles en f, K (puisque fn est conjugué de $f\mu$) sont semblables et donnent : $\dfrac{\mu K}{\mu f} = \dfrac{\mu\mu'}{\mu n} = \dfrac{\mu h}{\mu p}$

C'est à dire en désignant par Δ des accroissements $\dfrac{\Delta \overline{\mu f}}{\mu f} = \dfrac{\Delta \overline{\mu p}}{\mu p}$

On en conclut $\dfrac{\overline{\mu f}}{\mu p}$ = constante

Si le point O précédemment considéré avait été extérieur à l'ellipse on aurait eu recours à un hyperboloïde à une nappe infiniment aplati

Si au lieu d'une ellipse on avait eu une hyperbole on se serait servi de deux hyperboloïdes l'un à une nappe se projetant sur la partie ombrée du plan, l'autre à deux nappes couvrant le reste.

Remarquons enfin que dans cette démonstration des propriétés focales des coniques il n'y a aucune pétition de principe, la connaissance de ces propriétés n'étant nullement nécessaire pour établir l'existence de l'indicatrice et des ombilics dans les surfaces du second degré.

Note 4

Exposé succinct des théories fondamentales de la Géométrie. Supérieure

A Préliminaires

Conventions sur les Signes — Convention sur les signes des segments. $ab + ba = 0$.
Convention sur les signes des angles $AB + BA = 0$

Géométrie segmentaire — Lorsqu'un certain nombre de points $a\,b\,c \ldots K\,l$ sont situés sur une même droite, ils déterminent sur cette droite des segments qui donnent lieu entre eux à de nombreuses relations. L'étude très intéressante de ces relations a donné naissance à toute une branche de la Géométrie, la Géométrie segmentaire. on trouvera à la fin de cette note une curieuse application de ces relations. Pour le moment, on se bornera à démontrer la plus simple d'entre elles:

Identité linéaire entre m points — Etant pris m points $a\,b\,c \ldots K\,l$ en ligne droite, on a toujours l'identité

$$ab + bc + cd + \ldots \qquad + Kl + la = 0.$$

que l'on forme en prenant les lettres dans un ordre quelconque pourvu que la seconde lettre d'un segment soit la première du segment suivant, et que la lettre commençant la série soit aussi celle qui la termine."

Cette identité est facile à vérifier directement pour trois

---

(1) Ces théories sont dues aux beaux travaux de M. Chasles : l'importance croissante qu'elles ont prise dans les recherches de la géométrie moderne joint aux difficultés qu'auraient les Elèves pour se procurer dans les circonstances actuelles des renseignements sur ces matières, m'ont décidé à donner à cette note un aussi grand développement. On y trouvera outre les propositions essentielles pour la connaissance des trois grandes théories étudiées un certain nombre d'applications qui ont été choisies de manière à familiariser le lecteur avec les procédés particuliers à ce mode d'investigation.

points $a\ b\ c$: on passera au cas d'un quatrième point d en ajoutant les identités

$$\begin{array}{r} ab + bc + ca = 0 \\ cd + da + ac = 0 \\ \hline \end{array}$$

qui donnent, $ac + ca$ étant nul : $ab + bc + cd + da = 0$

Et ainsi de suite

Convention sur les imaginaires

Deux points $m\ m'$ étant rapportés à une même origine o, on appellera éléments de ces points par rapport à cette origine les quantités :

$$\mu = om + om'$$
$$\nu = om . om'$$

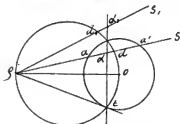
qui représentent la somme et le produit des segments relatifs aux deux points

Étant donnés deux points quelconques, on pourra toujours déterminer leurs éléments

Réciproquement étant données deux quantités $\mu . \nu$ on pourra toujours trouver deux points dont ces quantités seront les éléments si la condition $\mu^2 > 4\nu$ est satisfaite. Si μ^2 est inférieur à 4ν, les points cessent d'exister : mais s'ils n'entrent dans une question que par leurs éléments, tous les raisonnements qu'on aura pu faire subsistent : et si dans ces raisonnements et dans les énoncés auxquels ils ont conduit, on a mentionné les points $m\ m'$, on pourra conserver à ces raisonnements et à ces énoncés la même forme en disant que dans ce cas les points $m\ m'$ sont conjugués "imaginaires".

Ce mot on le voit n'est qu'une fiction. L'utilité de de cette fiction c'est de rattacher un résultat ou une construction générale au cas particulier dans lequel la présence de deux points procure une image visible et parfaitement claire des propriétés de la figure. Seulement il faut remarquer que dans tous les ca[s] [illegible], un résultat trouvé par la considération de deux

points subsiste lorsque ces deux points deviennent imaginaires. Les points imaginaires ne figurant dans les relations que par leurs éléments, ce résultat est susceptible d'une expression plus générale dans laquelle les deux points n'entreront pas.

Comme exemple à l'appui de ces considérations nous citerons le théorème suivant :

Soit un cercle O et un point S extérieur à ce cercle. Menons par S, une sécante qui coupe le cercle en a a' & construisons α par la relation.

$$\frac{2}{S\alpha} = \frac{1}{Sa} + \frac{1}{Sa'}$$

Le lieu du point α qui est dit conjugué harmonique de S par rapport à a a' est une droite, c'est la polaire du point S relativement au cercle, c'est à dire la corde de contact des tangentes issues de ce point. Si la sécante ne rencontre pas le cercle on ne voit plus ce que devient la relation, mais en la mettant sous la forme :

$$\frac{2}{S\alpha} = \frac{\overline{Sa} + \overline{Sa'}}{\overline{Sa} \cdot \overline{Sa'}}$$

On remarque que les points a a' n'y entrent que par leurs éléments. D'ailleurs si l'on trace sur SO comme diamètre un cercle dont l'intersection avec la sécante est en d et si l'on appelle t le point de contact d'une tangente menée de S au premier cercle on a :

$$\overline{Sa} + \overline{Sa'} = 2\overline{Sd}$$
$$\overline{Sa} \cdot \overline{Sa'} = \overline{St}^2$$

Et la relation peut donc s'écrire :

$$\frac{1}{S\alpha} = \frac{\overline{Sd}}{\overline{St}^2}$$

Sous cette forme on voit qu'elle définit le point α pour toute position de la sécante.

En disant d'une manière générale que la droite trouvée est le lieu du point α conjugué harmonique de ς par rapport aux deux points $a\,a'$ réels ou imaginaires, on rattachera le résultat obtenu au cas particulier où les points $a\,a'$ existent et font image, mais l'expression.

$$\frac{1}{\varsigma\alpha} = \frac{\varsigma d}{\varsigma t^2}$$

montre que le résultat général serait susceptible d'un énoncé où les points a & a' n'entreraient pas.

B Théorie du rapport anharmonique

Définition du rapport anharmonique.

1° Étant donnés quatre points $a\,b\,c\,d$ en ligne droite on appelle rapport anharmonique de ces quatre points les fonctions : telles que :

$$r = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$$

qu'on représentera pour simplifier par le symbole $(a\,b\,c\,d)$

On peut former avec les quatre points donnés 6 rapports différents dont trois sont les inverses des trois autres (1)

2° Étant donnés quatre droites $A\,B\,C\,D$ passant par un même point, on appelle rapport anharmonique de ces quatre droites la fonction

$$\rho = \frac{\sin.AC}{\sin.AD} : \frac{\sin.BC}{\sin.BD} = (A\,B\,C\,D)$$

& les analogues

3° Étant donnés quatre plans $A\,B\,C\,D$, on appelle rapport anharmonique de ces quatre plans, la fonction

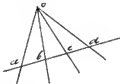
$$R = \frac{\sin AC}{\sin AD} : \frac{\sin.BC}{\sin.BD} = (A\,B\,C\,D)$$

---

(1) Remarquons que si l'un des quatre points s'éloigne à l'infini, les segments renfermant ce point disparaissent du rapport comme s'il devenaient égaux à l'unité. Il en sera de même pour toute fonction ne renfermant que des rapports anharmoniques.

et les analogues. C'est le rapport anharmonique du faisceau de droites obtenu en coupant le faisceau de plans par un plan secant perpendiculaire à l'arête du faisceau.

Théorèmes fondamentaux

Théorème I Si un faisceau de quatres droites passe par un système de 4 points les rapports anharmoniques des quatre droites sont respectivement égaux à ceux des quatre points.

Théorème II Si un plan transversal rencontre un système de quatre plans passant par une même droite, le faisceau des droites d'intersection a un rapport anharmonique égal à celui des quatre plans. Car si l'on coupe par un plan perpendiculaire à l'arête, on trouve: (faisceau ω) = (a b c d) = (faisceau O)

Remarque Les deux théorèmes précédents peuvent s'énoncer ainsi: Si l'on fait la perspective de quatre points en ligne droite ou de quatre droites concourantes situées dans un même plan, leur rapport anharmonique n'est pas changé (1)

(1) Cette propriété du rapport anharmonique a fait souvent confondre les méthodes de la géométrie supérieure avec la méthode de transformation par perspective, mais cette confusion ne peut exister que pour un examen superficiel, & nous croyons qu'après ce qui a été dit dans le cours, on se rendra compte de la profonde différence qui existe entre l'esprit des deux méthodes: tout ce qu'on peut dire à cet égard, c'est que la méthode de transformation projective offre de nombreuses applications de la théorie du rapport anharmonique & des autres théories qui s'en déduisent.

Construction du quatrième point d'un système dont les 3 1ers points & le rapport anh. sont donnés — Soient $a\ c\ d$ trois points donnés et $(a\ b\ c\ d) = \lambda$ le rapport anharmonique. On prend sur aS quelconque α et α' tels que $\frac{a\alpha}{a\alpha'} = \lambda$ on joint $\alpha\ d$, $\alpha' c$, et par l'intersection β de ces deux droites on mène βb parallèle à aS b est le point cherché (1)

On voit que la question admet toujours une solution et une seule.

Relation entre les rapports anharmoniques d'un même système de points ou de droites — 1° Système de quatre points. Soient :

$r = (a\ b\ c\ d)$ $r' = (a\ c\ d\ b)$ $r'' = (a\ d\ b\ c)$

et $\frac{1}{r} = (a\ b\ d\ c)$ $\frac{1}{r'} = (a\ c\ b\ d)$ $\frac{1}{r''} = (a\ d\ c\ b)$ (2)

les six rapports anharmoniques considérés : ils sont liés par les relations $\frac{1}{r'} = 1 - r$. $\frac{1}{r''} = 1 - r'$ $\frac{1}{r} = 1 - r''$

Qui font que l'un d'entre eux étant donné les cinq autres en résultent.

Vérifions la première. Elle s'écrit :

$$(a\ c\ b\ d) + (a\ b\ c\ d) = 1$$

Prenons un faisceau auxiliaire $ABCD$ l'équation devient

$$(ACBD) + (ABCD) = 1$$

Coupons par une nouvelle sécante, il vient $(a'c'b'd') + (a'b'c'd') = 1$.

& si la sécante est parallèle à C, cette équation se réduit à :

$$\frac{a'b'}{a'd'} + \frac{b'd'}{a'd'} = 1$$

ou : $$a'b' + b'd' + d'a' = 0$$

C'est l'identité entre trois points.

---

(1) Cette construction permet d'ailleurs en s'appuyant sur les théorèmes fondamentaux de résoudre la question analogue pour des droites et des plans.

(2) Les couples $a\ b$, $c\ d$ sont dits conjugués anharmoniques dans le rapport $(a\ b\ c\ d)$

Autres relations remarquables. $r\,r'\,r'' = -1$

$$(a\,b\,c\,d) = (b\,a\,d\,c) = (d\,c\,b\,a) = \frac{1}{(a\,b\,d\,c)}$$

2° Les relations qu'on vient de démontrer s'étendent évidemment aux rapports anharmoniques des droites & des plans (1)

Diverses formes du rapport anharmonique

1° Système de 4 points. Première forme $(a\,b\,c\,d) = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$

Introduisons un point arbitraire m : on a :

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{db}{da} : \frac{cb}{ca} = \left(\frac{db}{da} : \frac{mb}{ma}\right) : \left(\frac{cb}{ca} : \frac{mb}{ma}\right)$$

c.a.d. $\quad (a\,b\,c\,d) = (d\,c\,b\,a) = (d\,m\,b\,a)(c\,m\,b\,a)$

ou à cause de : $(d\,m\,b\,a) = \frac{1}{(d\,m\,a\,b)} = 1 - (d\,b\,m\,a)$

$$(c\,m\,b\,a) = \frac{1}{(c\,m\,a\,b)} = 1 - (c\,b\,m\,a)$$

$$(a\,b\,c\,d) = \frac{1-(d\,b\,m\,a)}{1-(c\,b\,m\,a)} = \frac{1 - \frac{dm}{da} : \frac{bm}{ba}}{1 - \frac{cm}{ca} : \frac{bm}{ba}} = \frac{\frac{bm}{ba} - \frac{dm}{da}}{\frac{bm}{ba} - \frac{cm}{ca}}$$

Si le point m s'éloigne à l'infini, il reste $(a\,b\,c\,d) = \dfrac{\frac{1}{ab} - \frac{1}{ad}}{\frac{1}{ab} - \frac{1}{ac}}$

Nous nous bornerons à donner ici ces deux formes du rapport anharmonique qui sont les plus utiles.

2° Système de 4 droites et de 4 plans. Expressions analogues aux précédentes $(ABCD) = \frac{\sin.AC}{\sin.AD} : \frac{\sin BC}{\sin BD}$

$$(ABCD) = \frac{\operatorname{Cot.} AB - \operatorname{Cot} AD}{\operatorname{Cot.} AB - \operatorname{Cot} AC}$$

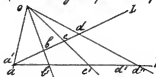
---

(1) On ne traitera dans la suite de cette note que des séries de points & des faisceaux de droites, mais les théorèmes s'étendent généralement aux faisceaux de plans.

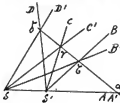
(2) La relation
$$\frac{\frac{bm}{ba} - \frac{dm}{da}}{\frac{bm}{ba} - \frac{cm}{ca}} = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$$
est une identité entre cinq points $a\,b\,c\,d\,m$ qui se trouve ainsi démontrée.

L'équation
$$\frac{\frac{1}{ab} - \frac{1}{ad}}{\frac{1}{ab} - \frac{1}{ac}} = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$$
est une identité entre quatre points

Propriété relative à deux systèmes de 4 points ou deux faisceaux de quatre droites ayant même rapport anharmonique.

Théorème I. Si deux systèmes de quatre points $a\,b\,c\,d$, $a'\,b'\,c'\,d'$ se correspondant deux à deux ont même rapport anharmonique (1) et qu'on fasse coïncider deux points homologues, a et a' par exemple, les trois droites qui joindront les autres points homologues passeront par un même point.

Évident, car s'il en était autrement, joignant d au point de concours O de bb', cc', cette droite couperait la droite L' en d'' différent de d' & l'on aurait $(a'b'c'd'') = (a\,b\,c\,d) = (a'b'c'd')$

Ce qui est impossible, si d'' ne coïncide pas avec d'

Théorème II. Si deux faisceaux de quatre droites $A\,B\,C\,D$, $A'B'C'D'$ ont même rapport anharmonique & qu'on fasse coïncider deux droites homologues A & A' par exemple, les trois points d'intersection des autres droites homologues seront situés en ligne droite.

Se démontre comme le précédent.

b Théorie du Rapport harmonique.

La théorie du rapport harmonique se présente comme cas particulier de celle du rapport anharmonique.

Rapport harmonique de quatre points

Si les quatre points en ligne droite $a\,a'\,b\,b'$ donnent lieu à la relation $(a\,a'\,b\,b') = -1$

ils sont dits en rapport harmonique : les deux couples $a\,a'$, bb' sont alors dits conjugués harmoniques l'un par rapport à l'autre (2)

Diverses positions possibles si b' est à l'infini, b est le milieu de aa'.

---

(1) Il suffit que deux rapports anharmoniques correspondants soient égaux pour que les autres le soient aussi.

(2) Les deux autres rapports anharmoniques du système sont alors égaux à $+\frac{1}{2}$ et à $+2$

Diverses expressions du rapport harmonique de quatre points

On peut exprimer le rapport harmonique de quatre points au moyen des relations suivantes :

1° $\frac{ab}{ab'} = -\frac{a'b}{a'b'}$

2° $\frac{\frac{1}{aa'} - \frac{1}{ab}}{\frac{1}{aa'} - \frac{1}{ab'}} = -1$

ou $\frac{2}{aa'} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ab'}$

à cause de la symétrie on aura également :

$\frac{2}{bb'} = \frac{1}{ba} + \frac{1}{ba'}$

3° Si dans l'équation $\frac{ab}{ab'} = -\frac{a'b}{a'b'}$ on rapporte les segments à une origine arbitraire, on trouve :

$$\frac{ma - mb}{ma - mb'} = -\frac{ma' - mb}{ma' - mb'}$$

d'où $(ma + ma')(mb + mb') = 2ma.ma' + 2mb.mb'$.

Si α et $\mathcal{C}$ sont les milieux de aa', bb' cette relation peut s'écrire

$$2m\alpha\, m\mathcal{C} = ma\,ma' + mb.mb'.$$

4° Si m coïncide avec b on trouve $b\alpha\, bb' = ba\, ba'$

5° Si m coïncide avec α on a : $\alpha b \alpha b' = \overline{\alpha a}^2$

Rapport harmonique de quatre droites

Un faisceau de 4 droites $AA'BB'$ est harmonique lorsque : $(AA'BB') = -1$.

Si deux droites conjuguées sont rectangulaires ce sont les bissectrices des deux autres

Diverses expressions du rapport harmonique de quatres droites

Se déduisent de celles du rapport anharmonique comme dans le cas du système de quatre points.

C. Théorie de l'homographie.

Définitions

1° Séries homographiques. Deux séries de points en ligne droite $abc.kl$, $a'b'c'k'l'$ sont dites homographiques lorsque quatre points quelconques de l'une des deux séries ont même rapport anharmonique que leurs homologues dans l'autre.

On désigne généralement sous le nom de i et de j' les points qui dans l'une des deux séries correspondent aux points à l'infini dans l'autre.

Les droites $L L'$ sont dites axes d'homographie

2° Faisceaux homographiques. Deux faisceaux de droites ABC $KL . A'B'C' .. K'L$ sont dits homographiques lorsque quatre droites quelconques de l'un des faisceaux ont même rapport anharmonique que leurs homologues dans l'autre

Si l'on coupe deux faisceaux homographiques par deux sécantes on obtient deux séries homographiques

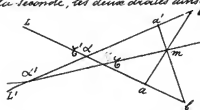
Propriétés principales de l'homographie

Théorème I Si l'on fait coïncider deux points homologues $a a'$ de deux séries homographiques $abc - a'b'c'$ - toutes les droites telles que aa' bb'.. concourrent en un même point

Théorème II Si l'on fait coïncider deux rayons homologues A et A' de deux faisceaux homographiques ABC ... $A'B'C'$.. les autres droites homologues se coupent en des points qui sont tous en ligne droite

Théorème III Étant donnés deux divisions homographiques

Cours de Géométrie descriptive de Mr Haag (appendice) 6. Livraison.

$abc \ldots a'b'c'$. sur deux droites $L L'$, si l'on prend deux points de la première et qu'on les joigne en croix aux points homologues de la seconde, les deux droites ainsi obtenues se coupent en un point m qui est constamment situé sur une même droite quels que soient les points a b que l'on ait choisis.

En effet soit α, $\mathcal{C}'$ le point d'intersection des droites $L L'$ ce point a pour homologue $\mathcal{C}$ ou α' selon qu'on le considère comme appartenant à la première série ou à la seconde, et l'on a

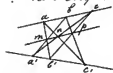
$$(\alpha \mathcal{C}\ a b) = (\alpha' \mathcal{C}'.\ a' b')$$

ou en prenant deux faisceaux de sommet $a a'$,

$$a'(\alpha \mathcal{C}\ a b) = a\,(\alpha' \mathcal{C}' a' b')$$

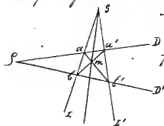
Or deux rayons homologues coïncident, donc les trois autres couples se coupent en ligne droite, c'est-à-dire que le point m est sur la droite fixe $\alpha' \mathcal{C}$

Corollaire I – Hexagone inscrit dans un angle

Les 3 couples $a a'$ $b b'$ $c c'$ peuvent toujours être considérés comme appartenant à deux séries homographiques. Donc les points m n p sont en ligne droite. C'est un cas particulier de l'hexagramme de Pascal

Corollaire II Polaire d'un point par rapport à un angle

Angle fixe $s L$, $s L'$. Sécantes ρD $\rho D'$ quelconques par un point fixe, le lieu des points m est une droite passant par s.

Résulte immédiatement du théorème III

La droite $s m$ est dite la polaire du point ρ par rapport à l'angle.

Remarquons que cette droite peut être considérée comme le lieu des points harmoniques conjugués de ρ par rapport

à l'angle. En effet le faisceau $S(\rho a \alpha a')$ donne :

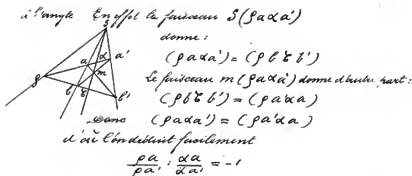
$$(\rho a \alpha a') = (\rho b \beta b')$$

Le faisceau $m(\rho a \alpha a')$ donne d'autre part :

$$(\rho b \beta b') = (\rho a' \alpha a)$$

donc $(\rho a \alpha a') = (\rho a' \alpha a)$

d'où l'on déduit facilement

$$\frac{\rho a}{\rho a'} : \frac{\alpha a}{\alpha a'} = -1$$

Théorème IV. Analogue au précédent sur les faisceaux

Expressions diverses de l'homographie

Pour deux séries :

1° On a d'abord. abc, $a'b'c'$ étant 3 couples définissant les deux séries, $m\,m'$ un couple variable qui les décrit

$$(abcm) = (a'b'c'm')$$

ou $$\frac{am}{bm} = \left(\frac{ac}{bc} : \frac{a'c'}{b'c'}\right) \frac{a'm'}{b'm'}$$

ou $$\frac{am}{bm} = \lambda \, \frac{a'm'}{b'm'}$$

λ étant une constante (1)

2° On a $(abmc) = (a'b'm'c') = \frac{1}{(a'b'c'm')} = 1 - (a'm'b'c')$

C'est-à-dire

$$(abmc) + (a'm'b'c') = 1$$

ou $$\frac{am}{ac} : \frac{bm}{bc} + \frac{a'b'}{a'c'} : \frac{m'b'}{m'c'} = 1$$

ou enfin $$\lambda \, \frac{am}{bm} + \mu \, \frac{c'm'}{b'm'} = 1$$

λ et μ étant deux constantes

---

(1) Si $\lambda = 1$ les divisions sont proportionnelles : on a alors

$$\frac{am}{ab} = \frac{a'm'}{a'b'}$$

Les points à l'infini se correspondent dans les deux séries

3° Faisons sur la position des points fixes dans l'équation précédente différentes hypothèses

Si b est à l'infini on a $\lambda\, am + \mu \frac{c'm'}{j'm'} = 1$

Si b et c' sont à l'infini : $\lambda\, am + \mu \frac{1}{j'm'} = 1$

Si a et c' sont à l'infini $\frac{\lambda}{bm} + \frac{\mu}{j'm'} = 1$ (1)(2)

4° Si dans l'équation $\frac{am}{bm} = \left(\frac{ac}{bc} : \frac{a'c'}{b'c'}\right)\frac{a'm'}{b'm'}$
on suppose b et a' à l'infini, cette équation devient :

$im \cdot j'm' = ic \cdot j'c' =$ une constante K

5° Introduisons dans l'équation précédente les points a et b' quelconques, il vient :

$$(am - ai)\,(b'm' - b'j') = K$$

c.a.d. $am \cdot b'm' - b'j'\, am - ai\, b'm' + ai\, b'j' = K$

ou $am\, b'm' + \lambda\, am + \mu\, b'm' + \nu = 0$

λ, μ, ν étant trois constantes dont les valeurs seront

$\lambda = -b'j'$ $\mu = -ai$

$\nu = + b'j'\, ab = + ai\, b'a'$

on trouve ν en faisant coïncider m avec a ou avec b

Suite (1) Il est facile de s'assurer que les trois hypothèses que nous venons de faire conduisent toutes à une expression générale des divisions homographiques. Il n'en serait pas de même de l'hypothèse b et b' à l'infini qui supposerait les divisions proportionnelles.

(2) L'équation $\frac{\lambda}{bm} + \frac{\mu}{b'm'} = 1$ exprime une propriété des divisions homographiques, c'est qu'on peut prendre $m\, m'$ tels que les segments bm, $b'm'$ soient égaux et de même signe ou bien égaux et de signe contraire. Dans le premier cas on est conduit à la relation $bm = b'm' = \lambda + \mu$

Dans le second on a $bm = -b'm' = \lambda - \mu$

Ces valeurs montrent que les trois constantes peuvent être prises arbitrairement (1) et comme d'ailleurs la relation

$$a\,m, b'm' + \lambda\, a\,m + \mu\, b'm' + \nu = 0$$

est la relation la plus générale du premier degré entre deux segments $a\,m$, $b'm'$; on voit que toutes les fois que deux séries seront telles qu'à un point de l'une correspondra un point de l'autre et un seul, les deux séries seront homographiques.

Pour deux faisceaux. Relations analogues aux précédentes et qui s'en déduisent facilement au moyen des théorèmes fondamentaux.

C Divisions homographiques sur une même droite

Deux divisions homographiques peuvent être situées sur une même droite et l'on est conduit dans ce cas à rechercher les points doubles c'est-à-dire les points qui se correspondent

Points doubles — à eux-mêmes dans les deux séries

Ces points sont fournis par la relation

$$a\,m\; b'm' - b'j'\,am - ai\; b'm' + ai\; b'a' = 0$$

qu'on peut simplifier en faisant coïncider a et b' et où l'on supposera que m et m' se confondent il vient :

$$\overline{am}^2 - (ai + aj')\,am + ai\;aa' = 0.$$

équation donnant deux points doubles, qui pourront être imaginaires conjugués.

Remarques : 1° Le milieu des points doubles coïncide avec celui de i et de j'.

2° Si l'un des points doubles est à l'infini les divisions sont proportionnelles

---

(1) Car étant choisis arbitrairement sur deux droites deux points $a\,a'$ par exemple, on déterminera ensuite successivement au moyen de $\lambda\,\mu\,\nu$, bb', $i\infty'$, $\infty j'$ qui déterminent les séries

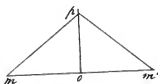
3° Si le point a dans l'équation trouvée coïncide avec le milieu des points doubles cette équation se réduit à :

$$\overline{om}^2 = - oi\; oo'$$

et l'on voit que : $oi\; oo' < 0$

sera la condition de réalité.

4° Dans le cas où les points doubles sont imaginaires une remarque intéressante peut être faite. On peut en effet poser

$$oi\; oo' = \overline{op}^2$$

Portons sur la perpendiculaire en o à l'axe d'homographie une longueur égale à op, et joignons le point P à deux points conjugués quelconques mm'.

La relation entre m et m' peut s'exprimer par :

$$om\; om' + oi\,(om - om') + oi\; oo' = 0$$

divisant par $oi.oo'$ ou $\overline{op}^2$ on a :

$$\frac{om}{op} \cdot \frac{om'}{op} + \frac{oi}{op}\left(\frac{om}{op} - \frac{om'}{op}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{tg\; mpo + tg\; opm'}{1 - tg\; mpo\; tg.\, opm'} = - \frac{op}{oi}$$

ou $tg.\; mpm' =$ constante

C'est à dire qu'il existe un point p d'où l'on voit tous ces couples conjugués sous un même angle

Réciproquement si un angle constant tourne autour de son sommet les points où ses côtés rencontrent une droite fixe, forment deux séries homographiques dont les points doubles sont imaginaires.

C' Faisceaux homographiques ayant même sommet.

Rayons doubles.

Les faisceaux homographiques ayant même sommet dont les rayons doubles sont imaginaires jouissent d'une propriété remarquable. On peut faire d'une infinité de manières leur perspective sur un plan de manière à ce que les rayons homologues fassent en perspective un angle constant. Résulte immédiatement de ce qui a été démontré pour les séries

---

D Théorie de l'Involution
d Involution de six points

Définition

Étant donnés trois systèmes de deux points en ligne droite aa', bb', cc', si l'on a entre ces six points la relation

$$(a\,b\,c\,c') = (a'\,b'\,c'\,c)$$

les trois couples sont dits en involution

Il est facile de s'assurer que si l'équation précédente est vérifiée toute équation analogue dans laquelle entreront les six points donnés le sera également. Ces équations sont au nombre de six (1)

Expressions de l'involution de 6 points

1° On obtient les équations dites à 8 segments; en écrivant les relations précédentes de manière à ce que les points du couple qui entre dans les deux membres servent d'origine aux segments. Ainsi

---

(1) On pourra les former en faisant jouer successivement aux trois couples le rôle du couple cc', et en permutant ensuite les accents des autres points de la manière suivante:

$cc' \left\{ \begin{matrix} ab \\ a'b' \end{matrix} \right.$. $aa' \left\{ \begin{matrix} bc \\ b'c' \end{matrix} \right.$ $bb' \left\{ \begin{matrix} ac \\ a'c' \end{matrix} \right.$

La relation : $(abca') = (a'b'c'a)$

s'écrira : $\frac{ab}{ac} : \frac{a'b}{a'c} = \frac{a'b'}{a'c'} : \frac{ab'}{ac'}$

ou : $\frac{ab \cdot ab'}{ac \cdot ac'} = \frac{a'b \cdot a'b'}{a'c \cdot a'c'}$

il y aura trois équations de cette espèce

2°. Les équations dites à 6 segments s'obtiennent en écrivant les relations d'involution de manière à introduire le segment du couple commun dans les deux membres

Ainsi : $(abca') = a'b'c'a)$

s'écrira $\frac{ab}{aa'} : \frac{cb}{ca'} = \frac{a'b'}{a'a} : \frac{c'b'}{c'a}$

ou $ba \cdot a'c \cdot c'b' = - b'a' \cdot ac' \cdot cb$

il y aura trois équations de cette espèce

Remarquons comme cas particulier que si c' s'éloigne à l'infini et qu'on désigne par o ce que devient alors son conjugué, l'une des équations à 8 segments donnera : $oa \cdot oa' = ob \cdot ob'$

Théorème

Si deux couples cc', dd' forment chacun une involution avec deux autres couples aa', bb' les deux premiers couples formeront aussi une involution avec l'un quelconque des deux derniers. En effet les involutions aa' bb' cc' ; aa' bb' dd' s'expriment par : $(abcb') = (a'b'c'b)$ ou $\frac{ab}{ab'} : \frac{cb}{cb'} = \frac{a'b'}{a'b} : \frac{c'b'}{c'b}$

$$(abdb') = (a'b'd'b) \text{ ou } \frac{ab}{ab'} : \frac{db}{db'} = \frac{a'b'}{a'b} : \frac{d'b'}{d'b}$$

Divisant membre à membre on obtient

$$\frac{cb}{cb'} : \frac{db}{db'} = \frac{c'b'}{c'b} : \frac{d'b'}{d'b}$$

Ce qui exprime l'involution bb', cc', dd' qu'on voulait démontrer.

Points doubles — Si c coïncide avec c' l'équation à huit segments

$$\frac{ab \cdot ab'}{ac \cdot ac'} = \frac{a'b \cdot a'b'}{a'c \cdot a'c'}$$

donne $$\frac{\overline{ac}^2}{\overline{a'c}^2} = \frac{ab \cdot ab'}{a'b \cdot a'b'}$$

Soient $e\,f$ les deux points déterminés par cette relation on aura :

$$\frac{ae}{a'e} = +\sqrt{\frac{ab \cdot ab'}{a'b \cdot a'b'}}$$

$$\frac{af}{a'f} = -\sqrt{\frac{ab \cdot ab'}{a'b \cdot a'b'}}$$

On en conclut $$\frac{ae}{a'e} = -\frac{af}{a'f}$$

ce qui prouve que $e\,f$ divisent harmoniquement aa' - par raison de symétrie ils doivent aussi diviser harmoniquement bb'. Et l'on a ainsi une propriété remarquable des deux points doubles qui forment chacun avec deux segments donnés une involution.

Réciproque évidente

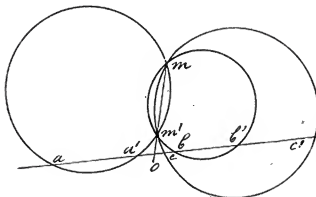
Corollaire Si trois couples aa', bb', cc' sont en involution et que $e\,f$ divisent harmoniquement aa' bb', ils divisent aussi harmoniquement cc'. En effet d'après la propriété des points doubles e fait involution avec aa' bb', il fait donc aussi involution avec aa', cc', et comme il en est de même de f, on voit que $e\,f$ divisent harmoniquement cc'.

Point Central — Quand six points aa', bb', cc' sont en involution, il existe toujours un point o de l'axe qui donne lieu à :

$$oa \cdot oa' = ob \cdot ob' = oc \cdot oc'$$

Cours de Géométrie descriptive de M. Haag (appendice) 8 Livraison.

En effet prenons un couple $O\infty$ en involution avec aa', bb', etc... Le point O est dit point central.

Construction du point central d'une involution. On trace deux cercles quelconques par aa', et bb', la corde mm' de ces deux cercles passera en O ce qui donne une construction très simple de ce point. Il résulte de cette construction que si l'on mène un cercle par cc' et m, ce cercle passera aussi en m'.

d' Divisions homographiques en involution.

Deux divisions homographiques décrites sur un même axe peuvent être en involution.

Dans ce cas il y a réciprocité entre les points homologues.

Cette réciprocité résulte immédiatement de la relation

$$Oa.\,Oa' = Ob.\,Ob' = Oc,\,Oc'$$

D'ailleurs cette condition est suffisante pour que deux séries homographiques soient en involution. Car si il y a réciprocité pour deux homologues cc' par exemple, on a l'équation

$$(abcc') = (a'b'c'c)$$

qui exprime l'involution des trois couples considérés

Remarque On peut toujours superposer deux divisions homographiques données sur deux droites de manière à ce qu'elles soient en involution. Il suffit pour cela de déterminer deux segments homologues ma. $m'a'$ de même longueur (ce qui est toujours possible d'après la note de la page 24) et de superposer a et m' m et a'

d.° Involution de six droites

Définition

Analogue à celle donnée pour les points

Si l'on coupe par une sécante quelconque, on a six points en involution

Expressions de l'involution de six droites

1° Equation à 8 termes :

$$\frac{\sin A.B \cdot \sin A B'}{\sin A C \cdot \sin A C'} = \frac{\sin A'B \cdot \sin A'B'}{\sin A'C \cdot \sin A'C'}$$

et deux analogues

2° Equation à 6 termes

$$\sin BA \cdot \sin A'C \sin C'B' = -\sin B'A' \cdot \sin A C' \cdot \sin CB.$$

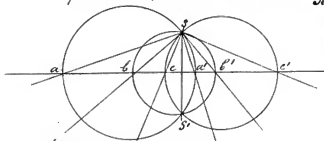
et deux analogues

Rayons doubles

Divisent harmoniquement l'angle de deux conjugués quelconques.

Rien d'analogue au point central

Théorèmes

I Si AA'. BB' CC' font involution et que les deux premiers couples soient rectangulaires, le troisième l'est également

Se voit en coupant le faisceau par une sécante, et menant les trois cercles par le sommet du faisceau et les trois segments obtenus. La corde commune SS' est perpendiculaire à la sécante donc, etc.

Réciproquement, trois angles droits forment un faisceau en involution

II Si trois angles ont une même bissectrice, ils forment une involution.

En effet soient AA', BB', CC' les trois angles, E leur bissectrice commune; on a les involutions

$A\,A',\ B\,B'\ E$

$A\,A'\ C\,C'\ E$

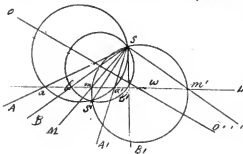
Donc on aura aussi l'involution

$A\,A'\,B\,B'\,C\,C'$.

d''' Faisceaux homographiques en involution

Deux faisceaux homographiques de même sommet peuvent être en involution.

Dans ce cas il y a réciprocité entre les rayons homologues. Condition nécessaire et suffisante.

Dans deux faisceaux en involution il y a toujours un couple rectangulaire et un seul. En effet coupons par une sécante L : tous les cercles passant par les couples de points d'intersection conjugués tels que $a\,a'$ et par le sommet S auront une même corde commune SS'. Leurs centres seront donc situés sur la perpendiculaire O à SS' en son milieu. Cette droite O rencontre L en un certain point ω. Prenons ω pour centre et ωS pour rayon, nous obtiendrons le couple conjugué $m\,m'$ et les rayons conjugués correspondants $M\,M'$ seront rectangulaires.

Application de la théorie de l'involution à la construction des points doubles de deux divisions homographiques quelconques.

On s'appuiera sur la remarque suivante :

Si $e\,f$ sont les points doubles de deux divisions homographiques, le segment ef fait involution avec ab', ba'

En effet l'équation

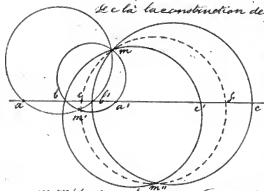
$$(a\,b\,e\,f) = (a'\,b'\,e\,f)$$

peut s'écrire $(a\,b\,e\,f) = (b'\,a'\,f\,e)$

Sous cette forme elle ne renferme plus que trois couples

$$a\,b';\ b\,a'.\ e\,f.$$

dont elle exprime l'involution.

De là la construction des points doubles de deux séries déterminées par les trois couples $a\,a'\ b\,b'\ c\,c'$. En effet si l'on mène par un point quelconque deux cercles embrassant les segments ab', ba', il y aurait un troisième cercle passant par les points $e\,f$ et par la corde $m\,m'$ des deux premiers. Faisons la même construction pour les segments ac', ca', et nous obtiendrons un nouveau point m'' du cercle cherché. on pourra alors tracer ce cercle qui donnera les points doubles par son intersection avec l'axe d'homographie

Cours de Géométrie descriptive de M. Haag (appendice) 9e Livraison.

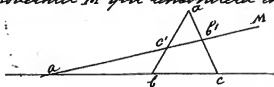
E Applications

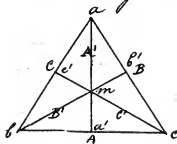
Nous avons terminé ici ce que nous nous étions proposé de dire sur les théories générales de la géométrie supérieure.

Mais avant de quitter cette matière, nous indiquerons encore quelques propriétés importantes du triangle, du quadrilatère et des sections coniques par lesquelles ces figures se rattachent aux recherches précédentes (1)

Nous ferons ressortir dans les énoncés un parallélisme remarquable entre les propriétés des points et des droites, parallélisme dont l'origine se retrouve dans le théorème fondamental sur les rapports anharmoniques

Triangle

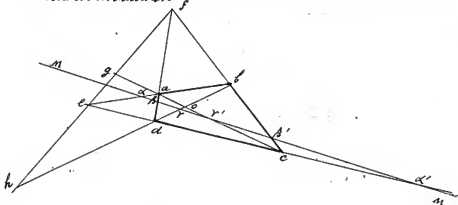
1° Si l'on coupe un triangle a b c par une transversale M qui rencontrera en a' b' c' les cotés, on a :

$$\frac{a'b \, . \, b'c \, . \, c'a}{a'c \, . \, c'b \, . \, b'a} = +1$$

2° Si l'on joint les sommets d'un triangle a b c à un point m, et qu'on appelle A' B' C' les droites ainsi obtenues A B C étant les cotés du triangle on a :

$$\frac{\sin A'B \, . \, \sin B'C \, . \, \sin C'A}{\sin A'C \, . \, \sin C'B \, . \, \sin B'A} = -1$$

Corollaire Si l'on appelle a' b' c' les points d'intersection de A' B' C' avec les cotés on a :

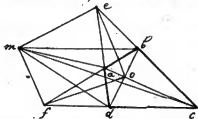
$$\frac{a'b \, . \, b'c \, . \, c'a}{a'c \, . \, c'b \, . \, b'a} = -1$$

(1) On se bornera à énoncer ces propriétés toutes les fois que leur démonstration n'offrira ni difficulté ni intérêt spécial.

Quadrilatère. Théorème I. Les points de rencontre des quatre cotés et des deux diagonales d'un quadrilatère avec une sécante quelconque sont en involution

Corollaire. Si la sécante coïncide avec la ligne qui joint les points de concours des sommets e f étant points doubles de l'involution

(g h e e f f)

on voit qu'ils divisent harmoniquement le segment g h

Théorème II. Si l'on joint un point quelconque aux sommets d'un quadrilatère et aux points d'intersection e. f des cotés opposés. On a trois couples en involution.

Corollaire. Si le point coïncide avec l'intersection o des diagonales, les rayons o a, o b étant rayons doubles dans l'involution.

(Oe Of, Oa Oa, Ob Ob)

On voit qu'ils divisent harmoniquement l'angle $e\,o\,f$

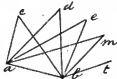
Sections coniques

Les sections coniques sont définies comme sections planes d'un cone de révolution ;

Théorèmes fondamentaux :

1° Si l'on joint deux points fixes a b de la conique à un point variable m pris sur la courbe les droites am, bm décrivent deux faisceaux homographiques.

2° Si l'on prend les points d'intersection m' m'' de deux tangentes fixes A, B avec une tangente mobile M, les deux points m m' décrivent deux divisions homographiques

Construction de la conique passant par cinq points donnés. Soient $a\,b\,c\,d\,e$ les cinq points : un point quelconque m de la courbe s'obtiendra en menant par a par exemple la droite quelconque am et déterminant bm par la condition

$$b(m\,e\,d\,c) = a(m\,e\,d\,c)$$

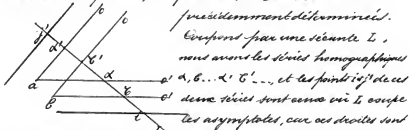
le point d'intersection m sera un point de la courbe

La tangente en un point, en b par exemple sera déterminée par

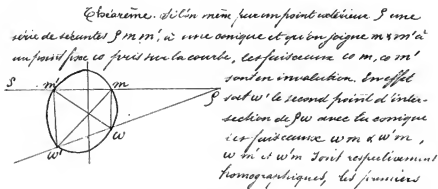
$$b\,(t\,e\,d\,c) = a\,(b\,e\,d\,c)$$

Points d'intersection de la courbe avec une droite : Les faisceaux a et b déterminent sur la droite deux séries homographiques dont les points d'intersection cherchés sont les points doubles.

Asymptotes. Les asymptotes sont les tangentes à la courbe aux points situés à l'infini. Menons par a un faisceau b' parallèle au faisceau b les rayons doubles des faisceaux a et b' déterminent les directions des asymptotes. Pour avoir

leurs positions appelons O et O' les points à l'infini sur la courbe, et considérons les faisceaux homographiques issus de ces points et se coupant sur la conique : ces faisceaux se composent de droites telles que $a o$, $a o'$ parallèles aux deux directions précédemment déterminées. Coupons par une sécante L, nous avons les séries homographiques $\alpha, \beta \ldots \alpha' \beta' \ldots$, et les points i & j' de ces deux séries sont ceux où L coupe les asymptotes, car ces droites sont dans chaque faisceau homologues du rayon OO' considéré comme appartenant à l'autre faisceau, et OO' étant tout entier à l'infini rencontre L à l'infini.

Des constructions analogues s'appliqueraient aux cas où la conique serait déterminée par cinq tangentes, ou par des points et des tangentes en général.

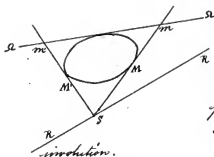
Les diamètres conjugués d'une conique forment deux faisceaux en involution.

Pôles et Polaires. Nous ne nous arrêterons pas à démontrer ici ces propriétés bien connues.

Théorème. Si l'on mène par un point extérieur S une série de sécantes $S m m'$, à une conique et qu'on joigne m & m' à un point fixe ω pris sur la courbe, les faisceaux ωm, $\omega m'$ sont en involution. En effet soit ω' le second point d'intersection de $S\omega$ avec la conique les faisceaux ωm & $\omega' m$, $\omega m'$ et $\omega' m$ sont respectivement homographiques, les premiers

Cours de Géométrie descriptive de M. Haag (appendice) 10° Simaison.

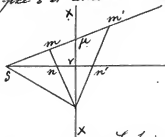
parcequ'ils se coupent sur la courbe, les seconds parcequ'ils se coupent sur la polaire du point S; donc les faisceaux ωm $\omega m'$ sont aussi homographiques, et comme il y a évidemment réciprocité pour les rayons homologues le théorème est démontré.

Réciproque évidente (1)

Théorème corrélatif. Si d'un point S d'une droite R on mène deux tangentes MM' à une conique, et si l'on prend les intersections m m' de ces tangentes avec une tangente fixe Ω, lorsque le point S décrit la droite R, les points m m' décrivent sur Ω des divisions homographiques en involution.

Figures homographiques & homologiques

Deux figures sont dites homographiques, lorsque les rapports anharmoniques que l'on peut considérer dans l'une sont égaux aux rapports homologues de l'autre.

Deux figures planes sont dites homologiques lorsque la droite qui joint leurs points homologues passe par un point fixe S et rencontre une droite fixe X en un point μ tel que

$$\frac{Sm}{Sm'} = \lambda \frac{\mu m}{\mu m'}$$

λ étant une constante.

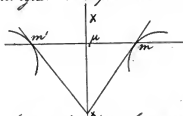
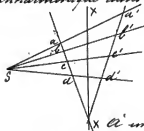
Le point S est dit centre d'homologie des deux figures, la droite XX axe d'homologie.

(1) Voir appendice, page 8, deux cas particuliers de ce théorème réciproque.

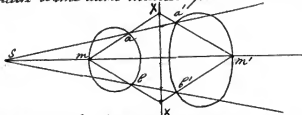
Les droites joignant deux points m n et leurs homologues m'n'. se coupent sur l'axe d'homologie : en effet :

$$(S\mu\, m m') = (S\nu\, n n') = \lambda$$

A des points en ligne droite correspondent des points en ligne droite

Les tangentes à des courbes homologues en des points homologues se coupent sur l'axe d'homologie.

Quatre points en ligne droite ont même rapport anharmonique dans les deux figures ; car ils sont les intersections de deux droites par un même faisceau

Les courbes homologues se coupent sur l'axe d'homologie. elles sont tangentes aux mêmes droites issues du centre d'homologie

A une courbe de degré n de la première figure correspond une courbe de degré n de la seconde. Se voit par le nombre de points d'intersection avec une sécante.

Le cas particulier des sections coniques peut être traité d'une autre manière par la considération

des faisceaux a'm', b'm' qui sont homographiques si les faisceaux a m, b m le sont.[1]

(1) Si l'une des coniques a son centre au centre d'homologie, ses asymptotes sont les tangentes menées de ce point à l'autre conique, et l'axe d'homologie est la parallèle à la polaire de S dans cette dernière menée à une distance double du centre S.

Les droites conjuguées d'une figure ont pour homologues des droites conjuguées de l'autre: à des pôles et des polaires correspondent des pôles & des polaires. Nous avons vu (Note 3) qu'étant donnée une conique il existait pour chaque point de son plan une conique indicatrice ayant ce point pour centre dont les diamètres conjugués étaient droites conjuguées de la première: ces coniques sont les homologiques de la conique donnée, lorsqu'on prend les points considérés pour centres d'homologie. De là cette nouvelle définition des foyers: ce sont les points qui pris pour centres d'homologie donnent des cercles comme figures homologiques de la conique proposée.

Les figures homologiques sont des figures homographiques situées l'une par rapport à l'autre dans une position spéciale: ce sont aussi des figures perspectives. (1)

Formule de Géométrie Segmentaire

Citons pour terminer une formule de Géométrie Segmentaire qui donne lieu à une remarquable application algébrique.

Étant pris n points a b c .... K et n-1 points m n p .. s. sur une droite, on a toujours:

$$(A)\ \frac{am.an.ap..as}{ab.\ ac\ ad...ak.}+\frac{bm.bn.bp....bs}{bc\ \ bd\ \ bc....bkba}+\dots=1$$

Car si cette équation n'était pas identique elle pourrait servir à déterminer l'un des points qui y entrent le point m par exemple, or en supposant le théorème démontré pour deux séries de n-1 & n-2 points, on voit que l'équation A sera vérifiée si m coïncide avec l'un quelconque des points de la première série, mais l'équation qui détermine m est du premier degré, & comme elle devrait admettre n solutions il est nécessaire qu'elle soit identique.

(1) Si une des figures peut être considérée comme établie en perspective, l'autre sera la vraie grandeur de cette figure ramenée dans le plan du tableau par une rotation autour de la ligne de terre XX: S sera le point de fuite des lignes perpendiculaires à XX et inclinées à 45° sur le géométral.

Ce raisonnement prouve que si l'équation A est démontrée pour $n-1$, $n-2$ points, elle le sera aussi pour n, $n-1$: tout revient donc à démontrer la relation dans le cas de 2 et 1 points, car dans ce cas on a :

$$\frac{am}{ab} + \frac{bm}{ba} = 1$$

ou $$am + mb + ba = 0$$

ce qui est l'identité linéaire.

La formule A que l'on peut mettre sous la forme

$$(A)\ \Sigma\ \frac{am \cdot an \cdot ap \ldots\ldots as}{ab \cdot ac \cdot ad \ldots\ldots ak} = 1$$

donne lieu comme cas particuliers à d'autres formules remarquables.

Supposons d'abord qu'un point S de la seconde série s'éloigne à l'infini, divisant tous les termes par as, on trouve l'équation

$$(B)\ \Sigma\ \frac{am \cdot an \cdot ap \ldots ar}{ab \cdot ac \ldots ak} = 0$$

Actuellement on peut faire disparaître une à une de l'équation B toutes les lettres de la seconde série sans en changer la forme : on voit donc que cette équation est générale pour 2 systèmes de n et de r points, pourvu que r soit inférieur à $n-1$

Si $r=0$ on a

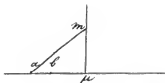
$$(C)\ \Sigma\ \frac{1}{ab \cdot ac \cdot ad \ldots ak} = 0$$

Il est bien entendu que dans toutes ces équations plusieurs points peuvent coïncider :

En faisant sur la coïncidence des points différentes hypothèses on arrivera à une foule de relations différentes, qui seront toutes des identités.

En supposant par exemple tous les points de la seconde série coïncidant avec M, on trouve,

$$(D)\ \Sigma\ \frac{\overline{am}^r}{ab \cdot ac \ldots ak} = 0$$

et il est facile de reconnaître que si r est pair, cette équation peut

être étendue à un point m extérieur à la droite considérée, car alors la formule

$$\overline{am}^2 = \overline{m\mu}^2 + \overline{a\mu}^2$$

prouve que $\overline{am}^{v}$ est de la forme

$$A + B\,\overline{a\mu}^2 + C\,\overline{a\mu}^4 + \dots + \overline{a\mu}^{2v}$$

donc, etc ....

Application à la décomposition des fractions rationnelles

Dans la relation

$$\sum \frac{am.an \dots as}{ab.ac \dots ak} = 1$$

remplaçons la lettre K par la lettre x ; nous aurons en n'étendant le signe Σ qu'aux $n-1$ premières lettres de la première série

$$\sum \frac{am.an \dots as}{ab.ac \dots ax} = 1 - \frac{xm.\,xn.\,x \dots xs}{xa.\,xb.\,xc \dots xh}$$

En en rapportant les segments à une même origine et désignant par chaque lettre l'abscisse du point correspondant :

$$\sum \frac{(a-m)(a-n)\dots(a-s)}{(a-b)(a-c)\dots(a-x)} = 1 - \frac{(x-m)(x-n)\dots(x-s)}{(x-a)(x-b)\dots(x-h)}$$

Si nous posons actuellement :

$$F(x) = A(x-a)(x-b)\dots(x-h)$$

$$\varphi(x) = \alpha(x-m)(x-n)\dots(x-s)$$

la relation précédente s'écrit :

$$\sum \frac{\frac{\varphi(a)}{\alpha}}{\frac{F'(a)}{A}} = 1 - \frac{\frac{\varphi(x)}{\alpha}}{\frac{F(x)}{A}}$$

ou $\dfrac{\varphi(x)}{F(x)} = \dfrac{\alpha}{A} + \sum \dfrac{\varphi(a)}{F'(a)(x-a)}$

C'est la formule générale de la décomposition des

fractions rationnelles (1).

Application à la démonstration d'une autre formule d'analyse

Prenons l'équation (A) sous la forme

$$(A)\ \sum \frac{(a-m)(a-n)\cdots(a-s)}{(a-b)(a-c)\cdots(a-k)} = 1$$

Si l'on fait $F(x) = A(x-a)(x-b)\ldots(x-k)$

$$\varphi(x) = \alpha\,(x-m)(x-n)\ldots(x-s)$$

l'équation précédente signifie que

$$\sum \frac{\varphi(a)}{F'(a)} = \frac{\alpha}{A}$$

le signe Σ s'étendant à toutes les racines de $F(x) = 0$

Telle est la formule d'analyse que nous nous étions proposé de démontrer.

Si $\varphi(x)$ était de degré inférieur à $n-1$, $F(x)$ restant de degré n, on trouverait en faisant $\alpha = 0$

$$\Sigma\ \frac{\varphi(a)}{F'(a)} = 0$$

Enfin si $\varphi(x)$ se réduisait à une constante on retrouverait la formule d'Euler :

$$\Sigma\ \frac{1}{F'(a)} = 0$$

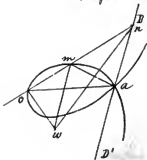
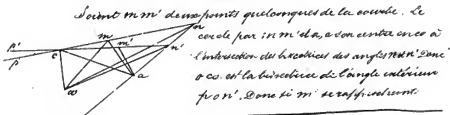
---

(1) Nous ne nous arrêterons pas à examiner ici le cas des racines multiples, ni celui où $F(x)$ est d'un degré inférieur à $\varphi(x)$. Le cas où $F(x)$ est d'un degré supérieur à $\varphi(x)$ résulte immédiatement de la formule en y faisant $\alpha = 0$

Note 5

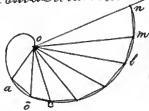
Sur l'Emploi de la Méthode des limites dans les problèmes de Géométrie

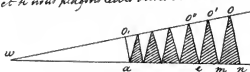
Les exemples de cette méthode sont si fréquents dans la suite même du cours qu'il peut sembler inutile d'en donner encore d'autres ici. Cependant les questions traitées dans le cours se rapportent presque toutes à des propriétés de continuité indépendantes de la nature particulière des courbes et des surfaces et comme d'autre part les infiniment petits y sont exclusivement considérés par leurs rapports et non par leur somme, il y a quelque intérêt à faire connaître une ou deux applications d'une autre nature.

1° Tangente à la strophoïde. La strophoïde est une courbe qui se rencontre fréquemment dans les épures (1) ; sa définition la plus générale est la suivante : Étant pris un pôle O, une droite quelconque DD', et un point a sur cette droite, on mène le rayon On, et l'on prend sur ce rayon $nm = na$; le point m décrit la strophoïde ; elle est dite droite si l'angle OaD est droit, gauche dans le cas contraire.

Soient $m\,m'$ deux points quelconques de la courbe. Le cercle par $m\,m'$ et a, a son centre en ω à l'intersection des bissectrices des angles $n\,a\,n'$. Donc $o\,\omega$ est la bissectrice de l'angle extérieur $p\,o\,n'$. Donc si m' se rapprochant

(1) On la trouve notamment comme cas particulier de la courbe d'ombre de la vis à filet triangulaire.

indéfiniment de m, l'angle $m\,o\,m'$ devient nul, $o\,c\,o$ devient la perpendiculaire à $o\,m$, et comme alors $m\,c\,o$ est la normale à la courbe on a une construction simple de cette normale au moyen de l'intersection de la bissectrice de l'angle $o\,n\,a$, et de la perpendiculaire en o à $o\,n$ (1)

3°. Quadrature de la spirale logarithmique. La spirale logarithmique se définit géométriquement de la façon suivante : C'est une courbe qui coupe sous un angle constant tous les rayons vecteurs issus d'un point fixe appelé pôle.

Cherchons la quadrature de la surface comprise entre cette courbe et deux de ses rayons oa, on.

Divisons l'angle $a\,o\,n$ en un grand nombre de parties égales par les rayons ob, oc ... ol, om. Tous les triangles tels que $o\,n\,m$, $o\,m\,l$, ainsi formés sont semblables (2)

et si nous plaçons leurs bases bout à bout sur une même droite, leurs sommets, à cause des triangles isocèles $o\,m\,o'$, $o'\,l\,o''$, etc. seront situés sur une seconde droite qui coupera en ω la première

---

(1) En indiquant cette construction de la tangente à la strophoïde, on a voulu donner un exemple de la marche la plus régulière à suivre pour la détermination des tangentes en général : étudier les propriétés de la sécante d'abord puis en passant à la limite rechercher ce que ces propriétés deviennent et si l'on peut [illegible] une construction

(2) Car deux arcs de courbe quelconques correspondant à un même angle au pôle sont évidemment semblables

Supposons maintenant que le nombre des triangles aille en croissant indéfiniment, les angles tels que omo' tendant vers zéro le triangle $co\,on$ devient rectangle en o, l'angle $on\,co$ devient l'angle constant θ sous lequel la courbe coupe les rayons issus du pôle la somme des aires ombrées a pour limite l'aire courbe que l'on cherche et cette aire est la moitié du trapèze $on\,qa$ – son expression sera donc : $A = \frac{1}{2}\,\frac{Oa + on}{2} \times oo,$

$$\text{ou bien } A = \frac{(Oa + On)\,(Oa - On)\,\mathrm{tg}\,\theta}{4} = \frac{(\overline{Oa}^2 - \overline{On}^2)\,\mathrm{tg}\,\theta}{4} \;(1)$$

Recherche des maxima et minima géométriques par la méthode infinitésimale.

On s'appuie sur le principe suivant dû à Fermat :

Lorsque une quantité géométrique est maximum ou minimum (2), deux valeurs infiniment voisines peuvent être considérées comme égales entre elles. En effet les accroissements successifs de la quantité qu'on considère devenant ~~de~~ négatifs de positifs ou inversement : la loi de continuité exige qu'ils passent par zéro (car le changement de signe par l'infini n'est pas admissible)

Applications :

Mener par un point o dans une courbe une sécante qui détache un segment minimum. Soit $m\,n$ la sécante cherchée

Donnons lui un déplacement infiniment petit ; la considération des triangles ombrés qui doivent être égaux montre que om doit être égal à on ce qui définit la position de la sécante.

---

(1) On fera facilement les raisonnements rigoureux que nous sous-entendons ici

(2) La définition du maximum et minimum est bien entendu celle de l'algèbre

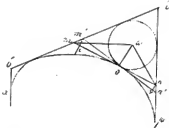
Problème des polygones à périmètre maximum ou minimum inscrits ou circonscrits à un arc de courbe [1].

1°. Polygone inscrit. Soit $ab \ldots mnp$ un polygone de m côtés à périmètre maximum inscrit à une courbe. Laissant tous les sommets fixes sauf le sommet n, le chemin mnp devra être évidemment un maximum parmi tous ceux obtenus en joignant à m et à p un point quelconque de l'arc mnp. Donc pour un déplacement infiniment petit de n la somme $mn + np$ ne varie pas, c. à d. que la courbe est tangente en n à une ellipse dont m et p seraient les foyers. Par conséquent, les côtés mn, np sont également inclinés sur la tangente en n. Il en sera de même évidemment pour tous les sommets autres que n, ce qui caractérise le polygone.

2°. Polygone circonscrit. Soit $ab \ldots mnp$ un polygone de m côtés à périmètre minimum circonscrit à une courbe. Laissant tous les côtés fixes, sauf mn, donnons à celui-ci un déplacement infiniment petit; la variation infinitésimale du périmètre devra être nulle, c.-à-d. qu'on aura ($m'\mu$, $n'\nu$ étant des arcs de cercle décrits de o comme centre):

$$mm' - m'\mu = nn' - n'\nu$$

ou $$m'\mu\left(\cot m - \frac{1}{\sin m}\right) = n'\nu\left(\cot n' - \frac{1}{\sin n'}\right)$$

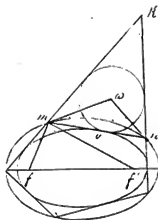
ou encore $$m'o \, tg \tfrac{1}{2} m = n'o \, tg \tfrac{1}{2} n'.$$

c.à.d. à la limite $$om \, tg \tfrac{1}{2} m = on \, tg \tfrac{1}{2} n.$$

Cette équation montre que le point o doit être la projection sur mn du point d'intersection ω des bissectrices des angles m et n, ou en d'autres termes le point de contact de mn avec le cercle inscrit au triangle mnK. Cette condition caractérise le polygone à périmètre minimum.

Remarque. Tous les polygones à périmètres maximum ou minimum relatifs à un même arc de courbe sont isopérimètres. En effet en passant d'un de ces polygones au polygone infiniment voisin la variation du périmètre doit être nulle ou du moins du second ordre de petitesse.

Appliquant ces considérations au cas de l'ellipse, on arrive facilement aux théorèmes suivants:

---

[1] La comparaison ne porte bien entendu que sur des arcs polygonaux ayant mêmes extrémités et un même nombre de côtés.

Si un polygone à périmètre maximum est inscrit dans une ellipse, ses côtés sont tangents à une seconde ellipse homofocale à la première et pour laquelle il est un polygone minimum circonscrit.

Si un polygone remplit la condition d'être à la fois inscrit et circonscrit à deux ellipses homofocales, son périmètre est maximum pour la première ellipse, minimum pour la seconde. (1)

Note 6.

Sur l'étude des Courbes planes au point de vue de la détermination des éléments caractéristiques en chacun de leurs points.

La question la plus générale que l'on ait à résoudre dans l'étude descriptive des courbes planes consiste dans la détermination de la tangente, du cercle osculateur, du diamètre, en un mot des éléments qui caractérisent la courbe en chacun de ses points.

La méthode des coordonnées fournit la solution générale de ce problème, mais dans les formules qu'elle donne, la simplicité géométrique des résultats se trouve souvent dissimulée. Il y a donc intérêt à étudier la question d'une façon plus directe et cette étude est facilitée dans la plupart des cas par la connaissance des théories géométriques dont nous exposerons les principes dans le cours de cette note. Les nombreux exemples par lesquels nous terminerons cet exposé devront montrer l'emploi qu'on peut faire de ces théories : ces exemples ont été choisis de façon à varier autant que possible les procédés de démonstration tout en faisant connaître

---

(1) La démonstration de ces théorèmes résulte de deux propriétés des coniques homofocales qui seront démontrées plus loin. Les coniques homothétiques et concentriques donneraient lieu pour les aires des polygones à des théorèmes tout à fait analogues, mais qui n'offrent pas le même intérêt parce qu'ils sont évidents par projection du cercle.

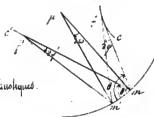
les propriétés les plus intéressantes des courbes connues.

A. Caustiques.

Définitions.

Les rayons issus d'un point f se réfléchissent à leur rencontre avec une courbe A de façon à faire un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence changé de signe : l'enveloppe C' des rayons réfléchis est dite la Caustique par réflexion de la courbe A relativement au foyer f.

Plus généralement, si les rayons incidents au lieu d'émaner d'un point fixe f touchent en f une enveloppe, cette enveloppe C et la courbe C' peuvent être dites par extension Caustiques réciproques de la courbe A.

Enfin si l'angle de réflexion au lieu d'être égal à l'angle d'incidence changé de signe lui est lié par la relation de réfraction $\sin. i = n \sin r$, la caustique est dite par réfraction.

Formule générale des Caustiques.

Appelons $\theta\ \theta'$ les angles que font avec les directions $mf\ mf'$ des rayons incident et réfracté la direction mm' sur la courbe dirimante : $\varphi\ \varphi'$ et ω les angles de ces directions mf, mf' et mm' avec une direction fixe. En tenant compte des signes des angles, nous aurons quelle que soit la disposition de la figure :

$$d\theta = d\varphi - d\omega \qquad d\theta' = d\varphi' - d\omega$$

d'ailleurs la relation permanente $\quad \cos.\theta = n \cos \theta'$

donne par différentiation : $\sin \theta\, d\theta = n. \sin. \theta'\, d\theta'$

c. à d. $\qquad \sin.\theta (d\omega - d\varphi) = n \sin.\theta' (d\omega - d\varphi')$

D'autre part, appelant $l\ l'$ les longueurs positives mf, mf' et ρ le rayon de courbure de A avec son signe (1), on a avec la même généralité :

$$l\, d\varphi = mm' \sin \theta \qquad l'\, d\varphi' = mm' \sin \theta' \qquad \rho\, d\omega = mm'$$

en portant dans l'équation précédente les valeurs de $d\varphi$, $d\varphi'$ et $d\omega$ tirées de ces dernières relations on trouve : $\quad \sin.\theta\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\sin.\theta}{l}\right) \quad \sin \theta'\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\sin \theta'}{l'}\right)$

ou, à cause de la valeur de n. (a) $\quad tg.\,\theta\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\sin \theta}{l}\right) = tg.\,\theta'\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\sin \theta'}{l'}\right)$

telle est la formule des caustiques par réfraction.

Dans le cas de la réflexion, (θ' étant égal à $\pi - \theta$ ou à $-\theta$) elle se réduit à :

---

(1) Voir plus loin (page 60) la note relative au signe du rayon de courbure

Construction géométrique. Centre de jonction.

$$(\alpha') \qquad \frac{1}{l} \pm \frac{1}{l'} = \frac{2}{\rho \sin\theta}$$

Les relations (α) et (α') fournissent une construction simple du point f car si l'on abaisse de μ les perpendiculaires μp, $\mu p'$ sur mf, mf', puis la perpendiculaire mq sur $m\mu$, il est facile de s'assurer que ff' passe en q (1). Ce point q qui reste invariable lorsque f et f' se déplacent sur les rayons incident et réfracté a été nommé centre de jonction (Cornu).

Caustiques secondaires.

On a donné le nom de caustiques secondaires aux développées des caustiques, et ces courbes généralement plus simples que les caustiques elles-mêmes ont donné lieu à d'intéressants théorèmes (Sturm, Quételet, Sarrus). Nous citerons le suivant qui résulte immédiatement de la relation entre les variations différentielles des longueurs mf, mf'.

Si de chaque point de la courbe dirimante on trace un cercle tangent à une développante de la caustique C, puis un second cercle concentrique dont le rayon soit avec celui du précédent dans un rapport égal à l'indice de réfraction, ces seconds cercles enveloppent une développante de C'.

Relation entre les rayons de courbure des caustiques réciproques.

On déduit facilement de la formule a la relation :

$$(b) \quad \frac{r}{l^3}\,tg\,\theta \sin^2\theta - \frac{\rho_2}{\rho^3}\,tg\,\theta + \frac{3\sin\theta}{l}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\sin\theta}{l}\right) = \frac{r'}{l'^3}\,tg\,\theta' \sin^2\theta' - \frac{\rho_2}{\rho^3}\,tg\,\theta' + \frac{3\sin\theta'}{l'}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\sin\theta'}{l'}\right)$$

où ρ_2 représente le rayon de courbure du second ordre la courbe dirimante, r r' les rayons de courbure des caustiques réciproques (les ds positifs étant comptés sur ces courbes dans le sens des rayons mf mf').

Dans le cas simple de la réflexion, cette formule se réduit à :

$$(b') \qquad \frac{r}{l^3} + \frac{r'}{l'^3} = \frac{2\rho_2}{\rho^3 \sin^2\theta} - \frac{3\cot\theta}{2}\left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{l'^2}\right)$$

et cette dernière relation peut encore se mettre sous la forme plus élégante :

$$(b'') \qquad \frac{r}{l^3} + \frac{r'}{l'^3} = \frac{}{\cos^2\theta}\left(\frac{tg\,\delta}{\rho^2} - \frac{1}{ll'}\right)$$

si l'on appelle δ la déviation dans la courbe A et ρ' le rayon de courbure de la courbe A' orthogonale à A et relativement à laquelle CC' sont aussi caustiques réciproques.

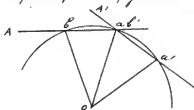
B. Roulettes.

Théorème I^{er}. Tout déplacement d'une figure plane de forme invariable peut être produit par une simple rotation.

Il suffit évidemment de démontrer ce théorème pour deux

---

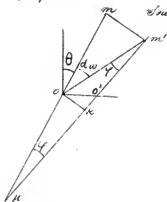
(1) La forme de la relation a montre que f et f' décrivent sur les rayons mf et mf' des divisions homographiques, et comme les axes d'homographie se coupent en un point m qui est son homologue dans les deux divisions, la droite ff' passe par un point fixe. Il suffit alors de vérifier que deux de ses positions pp' et μq, par exemple, passent en q.

points quelconques de la figure mobile. Soit A une droite de cette figure, A' sa nouvelle position. Prenons le point d'intersection de ces deux droites; ce point considéré comme appartenant à A et désigné alors par a vient en a' par suite du déplacement. Ce même point

considéré comme point de A' et désigné par b' dans cette nouvelle hypothèse était en b avant le déplacement, mais ab = a'b', si donc on mène un cercle par b a a' on pourra amener a b sur a'b' par une rotation autour du centre de ce cercle

En appliquant ce théorème à des déplacements infiniment petits successifs, on voit que le mouvement quelconque d'une figure plane peut être produit par le roulement d'une courbe liée à la figure mobile sur une courbe fixe qui est dite base du roulement. Le point de contact de ces deux courbes est appelé Centre instantané de rotation. La trajectoire d'un point quelconque lié à la figure mobile est dite roulette

Trajectoire d'un point mobile.

Tangente

Les normales à toutes les trajectoires passant au centre instantané de rotation, leurs tangentes sont déterminées si l'on connaît ce centre ou deux d'entre elles. Application à la conchoïde, à l'épicycloïde &c.

Courbure

Soient oo' deux centres instantanés successifs et $d\omega$ l'angle infinitésimal dont la figure tourne autour de o. Cherchons le rayon de courbure de la trajectoire m; mo, mo' étant deux normales consécutives, μ est le centre de courbure. Or le triangle $m'o\mu$ donne $d\omega = \varphi + \varphi'$

On en conclut aisément en appelant θ l'angle complémentaire

de moo'

$$\frac{1}{om} + \frac{1}{o\mu} = \frac{d\omega}{oo'\cos\theta}$$

Si maintenant l'on désigne par R et R' les rayons de courbure respectifs de la base et de la courbe roulante, $d\omega$ étant la somme des angles de contingence de ces deux courbes, la formule précédente pourra s'écrire : $\frac{1}{om} \pm \frac{1}{o\mu} = \frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}\right)$

en réservant la question des signes.

Cette équation détermine le centre de courbure μ de la roulette.

Construction de Savary

Soient $c\,c'$ les centres de courbure correspondant à R et R'. Élevons une perpendiculaire à mo en o, et joignons m à c : ces deux droites se coupent en h, et l'intersection μ de $c'h$ avec om est le centre de courbure de la trajectoire m.

En effet abaissons ce perpendiculaire sur om, le faisceau $c'(dhcm)$ et les parallèles df, ho, ce donnent :

$$(f\mu om) = (dhcm) = (foem) = 1 - (feom)$$

c'est-à-dire $\frac{fo}{fm} : \frac{\mu o}{\mu m} + \frac{fe}{fm} : \frac{eo}{em} = 1$

d'où $\frac{\mu m}{\mu o} + \frac{em}{eo} = \frac{fm}{fo}$

ou enfin $\frac{1}{om} - \frac{1}{o\mu} = \frac{1}{oe} - \frac{1}{of} = \frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)$

Le calcul que nous venons de faire n'a pas seulement pour résultat la vérification de la construction précédente ; il nous montre encore quels signes doivent être attribués aux segments dans l'équation du rayon de courbure : nous serions du reste arrivés au même résultat si nous avions donné des signes aux angles $\varphi\ \varphi'$ et aux angles de contingence.

Remarques : 1° Les rayons $R\,R'$ n'entrant dans l'équation que par l'expression $\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}$ on voit que pour toutes

les questions de courbure, on pourra substituer aux courbes de roulement d'autres courbes quelconques pourvu que la somme $\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}$ reste constante. En particulier on pourra prendre une droite et un cercle w et le rayon du cercle sera déterminé par

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'}. \quad (1).$$

Dans ce cas la construction de Savary se simplifie.

2° Le lieu des points pour lesquels le rayon de courbure est infini est le cercle décrit sur $o\,a$ comme diamètre. Ce cercle a reçu pour cette raison la dénomination de Circonférence des inflexions.

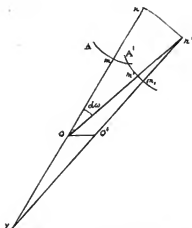
Enveloppe d'une courbe mobile

La détermination de l'enveloppe d'une courbe mobile se présente comme problème corrélatif de la détermination de la trajectoire d'un point.

Points de l'enveloppe. Les points de l'enveloppe s'obtiendront en abaissant du centre instantané O des normales à la courbe mobile, de même que les normales à la trajectoire s'obtenaient en joignant le point mobile au centre O. La tangente est celle de l'enveloppée.

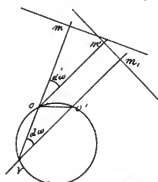
Courbure. Pour déterminer la courbure, prenons deux positions consécutives A et A' de l'enveloppée, et soient $m\,m_1$ les points correspondants de l'enveloppe : $m\,o$ m_1o' étant deux normales consécutives de cette dernière, γ sera son centre de courbure ; mais A est venu en A' par une rotation dw autour de O, donc si l'on fait tourner $o\,m$ de dw de façon à l'amener en $o\,m'$ il devient normal à A'. Son intersection n' avec $o'm_1$ est alors le centre de courbure de A'.

(1) Ceci revient à déterminer le rayon de courbure des trajectoires par la considération de cycloïdes ayant avec elles un contact du deuxième ordre.

Cours de Géométrie descriptive de M. Haag (appendice) Livraison 14.

au point m' et l'on voit que la trajectoire $n\,n'$ de ce point a précisément pour centre de courbure le centre de courbure cherché.

Le problème de la courbure des enveloppes se trouve ainsi ramené au problème déjà résolu de la courbure des trajectoires.

Remarque 1°. Plusieurs courbes qui ont même développée enveloppent des courbes qui ont aussi même développée.

2°. Le cas particulier où A est une droite donne lieu à une remarque intéressante. Dans ce cas la figure précédente se simplifie et fait voir que l'angle OYO' étant égal à $d\omega$, le lieu du point Y est un cercle par OO', c'est à dire tangent à la base(1). Ainsi les enveloppes de toutes les droites de la figure mobile ont leurs centres de courbure sur un même cercle.

On peut étendre cette remarque aux centres de courbure d'ordre quelconque de ces enveloppes; en effet leurs premières développées sont les enveloppes de leurs normales.

Mais toutes ces normales forment un faisceau invariable de forme, auquel la propriété démontrée est applicable,

Donc etc .....

(1) Il est facile de s'assurer soit directement, soit par la construction de Savary que ce cercle est le symétrique par rapport à OO' de la circonférence des inflexions.

Digression sur quelques propriétés mécaniques du mouvement d'une figure plane.

Pour compléter la théorie des roulettes, nous démontrerons ici quelques propriétés mécaniques importantes du mouvement qui sert à les engendrer. Nous aurons recours pour ces démonstrations à une méthode spéciale dont il est nécessaire que nous indiquions d'abord le principe[1]

Principe de la Méthode dite des équipollences. Sommes, différences, produits et quotients géométriques.

Tout en rentrant par son esprit général dans la classe des méthodes algébriques, cette méthode s'y distingue en ce que, contenant dans un seul symbole les deux coordonnées relatives à un même point, elle doit recourir à une algèbre spéciale où les égalités ordinaires sont remplacées par des égalités géométriques ou équipollences.

Ainsi :

Un point m est représenté par la quantité géométrique $\overline{Om}$ ou $\overline{u}_\alpha$[2] qui désigne en grandeur et en direction la distance de ce point à une origine fixe, α étant l'angle de Om avec une direction fixe.

La somme géométrique de deux quantités $\overline{Om}$, $\overline{On}$ sera la grandeur géométrique $\overline{Os}$ obtenue en portant les deux quantités données à la suite l'une de l'autre.

Le produit géométrique de deux quantités $\overline{Om}$, $\overline{On}$ sera une quantité $\overline{Op}$ qui devra être à $\overline{On}$ en grandeur et en direction

(1) Cette remarquable méthode est due au géomètre italien Bellavitis.

(2) Souvent quand la question dont on s'occupe ne nécessite pas la connaissance explicite de l'angle α on se borne à désigner le rayon Om par $\overline{u}$, la barre qui surmonte la lettre indiquant suffisamment qu'il s'agit d'une quantité géométrique et que les équations où elle entre sont des équipollences.

comme om est à l'unité positive, c'est-à-dire à la longueur 1 portée dans la direction qui sert d'origine aux angles. Ce sera en d'autres termes le côté homologue de om dans le triangle semblable au triangle $om1$ construit sur on.

Enfin les définitions de la soustraction, de la division, de la racine et de la puissance géométriques résultent de celles de l'addition et de la multiplication.

En partant de ces définitions simples, dans lesquelles celles de l'algèbre rentrent comme cas particuliers, il est facile de s'assurer que les règles générales du calcul algébrique sont applicables au calcul des équipollences.

Ainsi on peut intervertir l'ordre des termes dans une somme, celui des facteurs dans un produit, les équipollences peuvent être ajoutées, multipliées entre elles membre à membre etc. etc.

Différentielles et intégrales géométriques

Les différentielles géométriques sont des différences géométriques infiniment petites, et les intégrales des sommes de grandeurs géométriques infinitésimales. Et d'après ce qui vient d'être dit, les règles générales du calcul différentiel et intégral pourront leur être également étendues.

En particulier les accélérations d'ordres successifs d'un point $\overline{u}$ qui décrit dans le plan une trajectoire curviligne seront représentées par $\gamma_n = \frac{d^n \overline{u}}{dt^n}$, formule absolument analogue à celle donnée pour le mouvement rectiligne en mécanique.

Emploi des projections

D'après ce qu'on vient de voir, une quantité géométrique $\overline{u}$ peut toujours être remplacée dans les relations où elle entre par la somme géométrique de ses projections sur deux axes rectangulaires. Si l'on choisit pour un de ces axes la direction qui sert d'origine et si l'on désigne par r la grandeur algébrique de $\overline{u}$, les projections

seront :

$$\bar{r}_0 \cos\alpha \qquad \bar{r}_{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha$$

Mais d'après les définitions précédentes, $\bar{r}_{\frac{\pi}{2}} = \bar{r}_0\sqrt{-1}$ (1)
En sorte que l'on peut écrire :

$$\bar{u}_\alpha = \bar{r}_0 \left(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\right)$$

Si l'on ramène toutes les quantités géométriques à cette forme simple, elles se trouveront plus facilement comparables entre elles et les modules $\bar{r}_0$ étant tous des quantités de même direction (2), il sera inutile de leur conserver la barre et l'indice.

Application au problème des roulettes. Existence des Centres instantanés de divers ordres

Appliquons ces considérations au mouvement d'une figure plane invariable de forme, mobile dans son plan.

La distance $\bar{u}-\bar{v}$ de deux points m n peut se mettre, comme toute quantité géométrique, sous la forme :

$$R\left(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\right)$$

La différence entre les accélérations d'ordre n-1 de ces deux points s'obtiendra donc en différentiant n fois cette dernière expression.

Mais dans ces différentiations, R qui est la distance des deux points doit être considéré comme une constante et α qui est l'inclinaison de la droite mn sur la direction origine a pour dérivée par rapport au temps la vitesse angulaire ω de la figure.

---

(1) Le signe $\sqrt{\ }$ indique ici une opération géométrique : la quantité $\sqrt{-1}$ n'a rien d'imaginaire.

(2) Nous emprunterons quelquefois à l'algèbre l'expression de quantités réelles pour désigner les grandeurs portées dans la direction origine. Mais cette expression employée simplement par analogie n'impliquera rien de plus.

On obtiendra donc un résultat de la forme :

$$R.(\cos.\alpha + \sqrt{-1}\,\sin.\alpha)\,\bar{\theta}_n$$

en désignant par $\bar{\theta}_n$ une fonction géométrique de ω et de ses $(n-1)$ premières dérivées [1]

Remplaçons dans ce résultat $R(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)$ par $\bar{u}-\bar{v}$ et nous aurons :

$$(A)\quad \frac{d^n\bar{u}}{dt^n} - \frac{d^n\bar{v}}{dt^n} = (\bar{u}-\bar{v})\,\bar{\theta}_n$$

ou $$(A')\quad \frac{d^n\bar{u}}{dt^n} - \bar{\theta}_n\,\bar{u} = \frac{d^n\bar{v}}{dt^n} - \bar{\theta}_n\,\bar{v} = -\bar{\theta}_n\,\bar{\varphi}_n$$

en désignant par $\bar{\varphi}_n$ une grandeur géométrique qui est la même pour tous les points de la figure.

Soit o_n le point qui a $\bar{\varphi}_n$ pour rayon vecteur : l'accélération d'ordre $n-1$ de ce point est évidemment nulle. De plus, l'équation (A') pouvant s'écrire :

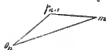
$$\frac{d^n\bar{u}}{dt^n} = \bar{\theta}_n.(\bar{u}-\bar{\varphi}_n) = \bar{\theta}_n\,\overline{o_n m}$$

on peut dire qu'il existe à chaque instant du mouvement et pour chaque valeur de n un point O_n tel que l'accélération d'ordre correspondant d'un point quelconque de la figure s'obtient en multipliant la distance de ce point au point O_n par une même quantité géométrique.

En d'autres termes.

L'accélération d'ordre $n-1$ $\overline{m\gamma}_{n-1}$ d'un point quelconque de la figure formera avec la droite $m\,o_n$ qui va de m à un point fixe, un triangle dont la forme sera toujours la même, quel que soit le point m que l'on ait choisi.

γ_{n-1} m o_n

---

(1) Les fonctions $\bar{\theta}$ sont liées entre elles par la relation :

$$\bar{\theta}_{n+1} = \frac{d\bar{\theta}_n}{dt} + \bar{\theta}_1\bar{\theta}_n$$

Leur expression générale est donnée par la formule :

$$\bar{\theta}_n = \Sigma_{k=1}^{k=n}\ \frac{\alpha^k\sqrt{-1}^k}{1.2.3\ldots k}\ \frac{d^n(\frac{\alpha}{\beta}-1)^k}{dt^n}$$

(Bertrand, calcul diff. page 141)

β devant être regardé comme constant dans la différentiation et remplacé par α dans le résultat. D'ailleurs $\frac{d\alpha}{dt}=\omega$; on trouve :

$$\bar{\theta}_1 = \omega\sqrt{-1} \qquad \bar{\theta}_2 = -\omega^2 + \frac{d\omega}{dt}\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

si ω est constant $\quad \bar{\theta}_n = \omega^n(\sqrt{-1})^n$

Ce point o_n a reçu le nom de centre instantané d'ordre n et le triangle auquel $m\,o_n\gamma_{n-1}$ est semblable peut être dit triangle caractéristique.

Centres instantanés principaux et secondaires

On voit d'après ce qui précède que pour un même mouvement géométrique, à chaque mode de variation de ω correspond un système particulier de centres. Pour simplifier le langage, nous appellerons centres principaux ceux qui correspondent à l'hypothèse de ω constant par opposition aux autres que nous désignerons sous le nom de centres secondaires.

Extension au cas où la figure mobile se déforme en restant semblable à elle même

Le mode même de démonstration qui vient d'être employé conduit assez naturellement à une extension importante du théorème.[1] Supposons en effet que R au lieu d'être constant soit seulement assujetti à la condition que $\frac{dR}{R}$ ait à chaque instant la même valeur pour tous les couples de points mobiles de la figure, la série des raisonnements précédents pourra être conservée et la forme de la fonction θ_n sera modifiée seulement.[2]

Ainsi après une première dérivation, on trouvera :

$$\frac{d(\bar{u}-\bar{v})}{dt} = (\bar{u}-\bar{v})\left[\omega\sqrt{-1}+\frac{dR}{R}\right] = (\bar{u}-\bar{v})\left(\omega\sqrt{-1}+K\right)$$

en appelant K la valeur de $\frac{dR}{R}$ à l'instant considéré.

Et ainsi de suite.

---

(1) Cette extension a été imaginée par M. Crouard, Officier d'Artillerie.

(2) Cette forme même peut être conservée si l'on admet que la rotation ω est remplacée par une quantité géométrique $\omega - K\sqrt{-1}$. Ce serait pour ainsi dire une sorte de rotation complexe composée d'une rotation ordinaire accompagnée de contraction dirigée vers le centre de rotation, et K serait le coefficient ou, si l'on veut, la vitesse de cette contraction.

La notion du triangle caractéristique subsiste, seulement avec les modifications que comportent les nouvelles valeurs des fonctions θ : ainsi le triangle du premier ordre n'est plus rectangle en m, en d'autres termes les vitesses ne sont plus perpendiculaires aux rayons allant du centre du premier ordre aux points mobiles, mais font un angle constant avec ces rayons.

Mais l'hypothèse que nous avons faite revient à supposer que la figure mobile se déforme en restant semblable à elle-même.

L'énoncé général est donc applicable à une pareille figure.

Relations entre la vitesse et les accélérations d'un point et les éléments caractéristiques de sa trajectoire.

Les théorèmes que nous venons de démontrer, en établissant des relations remarquables entre les accélérations des divers points d'une figure plane ne montrent pas encore comment la connaissance de ces accélérations pourra servir à déterminer les éléments des courbes décrites.

C'est cette dernière question que nous allons traiter maintenant.

Considérons la trajectoire d'un point dont le rayon vecteur est $\bar{u}$ et soient $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n$ les rayons de courbure d'ordre 1, 2 ... n de cette trajectoire. Si v est en grandeur la vitesse du point mobile et α la direction de cette vitesse, nous pouvons écrire l'équipollence

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = v(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)$$

ou plus simplement, $\frac{d\bar{u}}{dt} = v\bar{h}$

en désignant par $\bar{h}$ l'unité portée sur la direction de la tangente à la courbe et dans le sens du mouvement.

Différentions géométriquement cette relation en ayant soin de remplacer à chaque différentiation :

$$\frac{d\bar{h}}{dt} \text{ par } \frac{v}{\rho_1}\bar{h}\sqrt{-1}$$

$$\frac{d\rho_n}{dt} \text{ par } \frac{\rho_{n+1}v}{\rho_1} \quad (1)$$

---

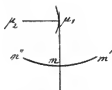
(1) Afin de lever toute ambiguïté sur les signes à attribuer aux rayons de courbure dans les équations géométriques, considérons une courbe quelconque : les angles étant comptés positivement dans le sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre, l'angle de contingence sera positif ou négatif suivant qu'on se déplacera en laissant la concavité à sa gauche

Nous trouverons :

$$(\mathcal{B})\qquad \begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= v\bar{h} \\ \frac{d^2\bar{u}}{dt^2} &= \left[\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{\rho_1}\sqrt{-1}\right]\bar{h} \\ \frac{d^3\bar{u}}{dt^3} &= \left[\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{v^3}{\rho_1^2} + \sqrt{-1}\left(\frac{3v\,dv}{\rho_1\,dt} - v^3\frac{\rho_2}{\rho_1^3}\right)\right]\bar{h} \\ &\text{etc} \ldots \end{aligned}$$

La solution de la question qui nous occupe est contenue dans ces formules.

On remarquera en effet que la partie du coefficient de $\bar{h}$ qui est multipliée par $\sqrt{-1}$, et qui représente par conséquent la composante normale à la courbe de l'accélération correspondante, se trouve exprimée en fonction seulement des accélérations d'ordre inférieur et des éléments de la trajectoire.

---

ou à sa droite, l'accroissement ds de l'arc sera également affecté d'un signe dépendant de l'origine qu'on aura choisie pour les arcs, en sorte que le rayon de courbure $\rho_1 = \frac{ds}{d\alpha}$ aura lui-même un signe, mais ce signe ne dépendra pas du sens dans lequel on se déplacera sur la courbe, puisque ds et $d\alpha$ changeront de signe simultanément.

Et il est facile de reconnaître que le centre de courbure μ_1 s'obtiendra toujours en portant ρ_1 avec son signe à partir du point m dans une direction faisant l'angle $+\frac{\pi}{2}$ avec celle des ds positifs.

De même le rayon de courbure d'ordre n $\rho_n = \frac{d\rho_{n-1}}{d\alpha}$ aura un signe dépendant de ceux de $d\alpha$ et de $d\rho_{n-1}$, mais indépendant du sens du mouvement, et le centre d'ordre n s'obtiendra en portant à partir de celui d'ordre $n-1$ la valeur de ρ_n avec son signe dans une direction faisant l'angle $n\frac{\pi}{2}$ avec celle des ds positifs.

Si $\bar{u}$ est le rayon vecteur du point m, celui de μ_n sera par conséquent :

$$\begin{aligned} \bar{V}_n &= \bar{u} + \bar{h}\left(\rho_1\sqrt{-1} + \rho_2\sqrt{-1}^2 + \ldots\ldots + \rho_n\sqrt{-1}^n\right) \\ &= \bar{u} + \bar{h}\ \Sigma_1^n \rho_p \sqrt{-1}^p \\ &= \bar{u} + \bar{h}\ \Sigma_1^n \frac{d^ps}{d\alpha^p}\sqrt{-1}^p \end{aligned}$$

en appelant $\bar{h}$ l'unité portée sur la tangente dans le sens des ds positifs.

Cours de Géométrie descriptive de M. Haag (Appendice, Livraison 15).

Constructions géométriques.

Des formules B se déduisent des constructions géométriques qui sont l'extension de celles indiquées dans la note 2. Nous nous bornerons à donner ces constructions dans le cas de la courbure et du diamètre.

Premier problème – Étant connue la vitesse $\overline{mv}$ et l'accélération $\overline{m\gamma_1}$ d'un point mobile, on demande le rayon de courbure de la trajectoire.

Menons par γ_1 un cercle tangent à mv en v. Ce cercle rencontre la direction de l'accélération en un second point γ_1' qui est la projection sur $m\gamma_1$ du centre de courbure du premier ordre.

Autrement – Prenons sur la normale $mo_1 = mv$; joignons $o_1\gamma_1$; menons par o_1 une perpendiculaire à o_1m qui rencontre $m\gamma_1$ en h : la parallèle par h à $o_1\gamma_1$ coupe la normale au centre de courbure.

Cette dernière construction qui se rattache plus intimement à la notion des centres d'accélération successifs n'est autre que celle de Savary à laquelle nous avons été déjà amenés, mais par des considérations un peu différentes.

Second problème – Étant connue la vitesse $\overline{mv}$ et les accélérations première et seconde $\overline{m\gamma_1}$ et $\overline{m\gamma_2}$, on demande le diamètre de la trajectoire.

Prenons $\overline{m\gamma_2'} = \frac{1}{3}\,\overline{m\gamma_2}$, projetons $\gamma_1\gamma_2'$ en $g_1 g_2'$ sur la normale, joignons g_1 à v, menons $g_2'h$ parallèle à g_1v : la parallèle à $\gamma_1 h$ par m est le diamètre.

Autrement – Dans le cas où au lieu de connaître directement

les accélérations du point mobile, ces accélérations sont déterminées par la position des centres principaux $o_1 o_2 o_3$, la construction précédente peut être modifiée comme suit:

On prend o'_3 au tiers de $o_1 o_3$, on projette o_2 et o'_3 respectivement en g et en k sur la normale et la tangente, on joint gk, on mène par o_1 la parallèle $o_1 h$ à gk, et la parallèle à $o_2 h$ par m est le diamètre.

Ces constructions donnent lieu aux remarques suivantes:

1°. Si l'accélération seconde $m\gamma_2$ est nulle ou a seulement même direction que la vitesse, la direction de l'accélération est celle du diamètre (comparer avec la note 2, page 5) : dans ce cas, o_2 se trouve sur la direction $o_1 m$.

2°. Dans le mouvement d'une figure plane, si o_3 coïncide avec o_1, les diamètres de toutes les trajectoires passent au point o_2.

3°. Pour tous les points situés sur le cercle décrit sur $o_1 o_2$ comme diamètre (circonférence des inflexions), le diamètre se confond avec la tangente à la trajectoire et passe en o_2.

Relations diverses qui facilitent la détermination des centres instantanés.

Si dans le mouvement qu'on étudie, les centres instantanés étaient connus, les constructions que nous venons d'indiquer permettraient de trouver immédiatement le rayon de courbure et le diamètre de toute trajectoire.

Mais en général dans les questions géométriques qui peuvent se présenter, les centres ne sont pas déterminés à priori; il est donc indispensable d'indiquer ici les propriétés les plus utiles qui peuvent servir à les construire.

1°. Construction du centre d'ordre p connaissant les accélérations d'ordre $p-1$ de deux points de la figure.

Soient $\overline{m\gamma}_{p-1}$, $\overline{m'\gamma'}_{p-1}$ les deux accélérations, K l'intersection de leurs directions, ω_p le centre cherché. Les triangles caractéristiques $m\omega_p\gamma_{p-1}$ $m'\omega_p\gamma'_{p-1}$ sont directement semblables, donc leurs angles en m et en m' sont égaux. Il en résulte que le quadrilatère $mm'K\omega_p$ est inscriptible. Et comme il en est de même du quadrilatère $\gamma_{p-1}\gamma'_{p-1}K\omega_p$, le point ω_p se trouve déterminé comme seconde intersection de deux circonférences qui se coupent déjà au point K. On trouvera donc toujours une solution et une seule.

Connaissant ω_p et le triangle caractéristique correspondant, les accélérations d'ordre $p-1$ seront immédiatement connues pour tous les points de la figure.

Relations entre les différents centres d'un même mouvement géométrique.

2°. Relations entre les positions des centres successifs d'un même mouvement et les éléments caractéristiques des courbes qu'ils décrivent.

Un point o_n centre instantané d'ordre n peut être considéré sous trois différents points de vue :

On peut le regarder comme simple point mobile coïncidant accidentellement avec un centre, et dans ce cas, il décrit une certaine trajectoire T_n ;

on peut le regarder comme centre instantané dans la figure fixe : il se meut alors sur une courbe C_n, lieu des centres instantanés dans la figure fixe ;

enfin, on peut le considérer comme centre instantané dans la figure mobile, et dans cette dernière hypothèse, il se déplace sur une courbe K_n entraînée avec la figure mobile et qui est le lieu du point o_n dans cette figure.(1)

(1) Dans le cas de $n=1$, les courbes C_1 K_1 sont la base du roulement et la courbe roulante.

Nous désignerons par $d\bar{\varphi}_n$ $\delta\bar{\varphi}_n$ et $\Delta\bar{\varphi}_n$ les déplacements de o_n pendant le temps dt dans ces trois hypothèses.

Centres principaux.

Occupons-nous d'abord des centres principaux :

En supposant $\omega = 1$, ce qui ne change rien au résultat géométrique que nous voulons obtenir, l'équation fondamentale (A) conduira facilement par différentiation(1) aux relations suivantes :

$$(C)\quad \begin{cases} (c) & \dfrac{\delta^p\bar{\varphi}_n}{dt^p} = \sqrt{-1}^{\,p}\left(\bar{\varphi}_{n+p} - \bar{\varphi}_p\right) \quad (2) \\ (c') & \dfrac{\Delta^p\bar{\varphi}_n}{dt^p} = \sqrt{-1}^{\,p}\left(\bar{\varphi}_{n+p} - \dfrac{p}{1}\bar{\varphi}_{n+p-1} + \cdots\cdots \pm \bar{\varphi}_n\right) \quad (3) \end{cases}$$

cette dernière pouvant s'écrire symboliquement :

$$(c'')\quad \frac{\Delta^p\bar{\varphi}_n}{dt^p} = \sqrt{-1}^{\,p}\,\bar{\varphi}^n\left(\bar{\varphi} - 1\right)^p$$

en convenant de remplacer dans le développement les exposants par des indices.

Les relations qui déterminent les courbes $c_n K_n$ lorsque les centres sont connus pourront permettre réciproquement la détermination de certains centres lorsque quelques-unes des courbes $c_n K_n$ seront directement connues.

Ainsi les trois équations :

$$\frac{d\bar{\varphi}_n}{dt^n} = \sqrt{-1}\left(\bar{\varphi}_n - \bar{\varphi}_1\right)$$
$$\frac{\delta\bar{\varphi}_n}{dt^n} = \sqrt{-1}\left(\bar{\varphi}_{n+1} - \bar{\varphi}_1\right)$$
$$\frac{\Delta\bar{\varphi}_n}{dt^n} = \sqrt{-1}\left(\bar{\varphi}_{n+1} - \bar{\varphi}_n\right)$$

---

(1) On remarquera que dans ces différentiations, il faut attribuer aux points o_n des déplacements δ afin que l'équation (A) soit permanente et puisse sans erreur être différentiée.

(2) La relation exprimée par cette équipollence s'énonce par le théorème suivant : l'accélération d'ordre $p-1$ du centre o_n décrivant la courbe c_n est égale à l'accélération du même ordre du centre o_{n+p} considéré comme simple point mobile.

(3) La formule c' est établie au moyen de l'équation du mouvement relatif qui sera donnée plus loin.

Cours de Géométrie descriptive de M. Haag (Appendice) Livraison 17

expriment que les tangentes aux courbes $T_n\ C_n\ K_n$ sont respectivement perpendiculaires aux côtés du triangle $o_n o_1\ o_{n+1}$, et le centre o_{n+1} se trouve ainsi déterminé par la connaissance de $o_1 o_n$ et de ces trois tangentes, etc.

On pourrait déduire des formules (c) un très grand nombre de relations géométriques analogues à la précédente. Nous nous bornerons aux remarques suivantes :

Si le centre o_n reste immobile dans le plan mobile, tous les centres d'ordre supérieur à n coïncident avec lui.

Si le centre o_n reste immobile dans le plan fixe, tous les centres d'ordre $p+Kn$ (quelles que soient les valeurs attribuées aux nombres entiers K et p) coïncident avec le centre d'ordre p. En particulier les centres d'ordre Kn coïncident avec o_n et sont comme lui immobiles dans le plan fixe.

Si le centre o_n a seulement ses accélérations d'ordre supérieur à q égales à 0, la même observation peut être répétée avec cette seule restriction que p doit être supérieur à $q+2$.

Réciproquement si deux centres principaux d'ordre p et $p+n$ par exemple coïncident d'une façon continue, le centre o_n a toutes ses accélérations d'ordre supérieur à $p-2$ égales à 0 et par suite les centres d'ordre $p+1$ et $p+n+1$, $p+2$ et $p+n+2$, etc, doivent aussi coïncider.

Le problème consistant à déterminer les centres principaux au moyen des courbes O, K, supposées connues, doit être traité spécialement et vu son importance, nous allons l'étudier d'une façon complète.

La solution en est fournie par la relation :

$$(C'_1) \qquad (\bar{\varphi}_{n+p}-\bar{\varphi}_n)\sqrt{-1}^{\,0} = \sqrt{-1}^{\,p-1}\frac{p}{1}\frac{\Delta\bar{\varphi}_n}{dt} + \sqrt{-1}^{\,p-2}\frac{p(p-1)}{1.2}\frac{\Delta^2\bar{\varphi}_n}{dt^2} + \dots + \frac{\Delta^p\bar{\varphi}_n}{dt^p}$$

équivalente à l'équation (C') et dans laquelle on fait $n=1$.

En effet, appelons R_c et r_c, R_K et r_K les rayons de courbure du premier et du second ordre des courbes

c, H, et admettons que la direction des ds positifs sur ces deux courbes soit aussi celle du mouvement de o_1, la condition $\omega = 1$ donne alors pour la vitesse du point o_1 :

$$V = \frac{1}{\frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_H}}$$

expression générale, quels que soient les signes des rayons de courbure qui y entrent.

Cette relation étant d'ailleurs permanente peut être différentiée et donne :

$$\frac{dV}{dt} = V^3\left[\frac{r_c}{R_c^3} - \frac{r_H}{R_H^3}\right]$$

En mettant ces valeurs dans celles de $\Delta\varphi$, $\Delta^2\varphi$, etc... fournies par les équations B, et reportant ensuite ces dernières dans l'équation précédente, on trouve

$$(D)\quad \begin{cases} \overline{o_1 o_2} = \dfrac{1}{\frac{1}{R_H} - \frac{1}{R_c}} \sqrt{-1}\,\bar{h} \\[2ex] \overline{o_1 o_3} = \left[\dfrac{\frac{r_c}{R_c^3} - \frac{r_H}{R_H^3}}{\left(\frac{1}{R_H} - \frac{1}{R_c}\right)^3} + \dfrac{\frac{1}{R_H} - \frac{2}{R_c}}{\left(\frac{1}{R_H} - \frac{1}{R_c}\right)^2}\sqrt{-1}\right]\bar{h} \qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Il est à remarquer que le centre o_2 se trouve toujours sur la normale et que la projection de o_3 sur cette normale ne dépend que des éléments caractéristiques du deuxième ordre. Cette dernière observation peut être facilement généralisée et étendue aux centres d'ordre supérieur.

Constructions géométriques. — Les formules D se traduisent par les constructions géométriques suivantes :

1°. Pour le centre o_2. — Menons par H centre de courbure de la courbe roulante une droite quelconque qui coupe en g la tangente $o_1 t$ et en h sa parallèle par le centre de courbure C de la base. Joignons $o_1 h$; la parallèle à cette dernière droite par g rencontre $o_1 H$ en o_2.

2°. Pour le centre o_3. — Menons par o_2 la parallèle $o_2 l$ à $o_1 t$ et par l la parallèle à $g o_2$.

Cette dernière droite coupe O_1K en un point v qui est la projection de O_3 sur la normale.

Pour avoir la projection u de O_3 sur la tangente, prenons sur cette tangente $O_1S = -O_1O_2$, projetons O_1 en p et en q sur SK, SC et par ces points $p\,q$ menons des parallèles à la tangente jusqu'en leurs rencontres en $m\,n$ avec les droites allant de O_1 aux centres de courbure de second ordre $C'K'$ des courbes $C_1\,K_1$. Menons par O_1 la parallèle à Cn jusqu'à sa rencontre avec O_2l en i. La parallèle à Km par i rencontre O_1t au point u.

Cas particuliers. Si la base C_1 est une droite, $\frac{1}{R_c} = 0$,

$\overline{O_1O_2} = R_K\sqrt{-1}\,\bar{h}$

$\overline{O_1O_3} = \left(-r_K + R_K\sqrt{-1}\right)\bar{h}$

les centres O_2 et O_3 coïncident avec les centres de courbure de premier et de second ordre de la courbe roulante.

Si la courbe roulante K_1 est une droite, $\frac{1}{R_K} = 0$.

$\overline{O_1O_2} = -R_c\sqrt{-1}\,\bar{h}$

$\overline{O_1O_3} = \left(-r_c - 2R_c\sqrt{-1}\right)\bar{h}$

le centre O_2 est le symétrique par rapport à la tangente du centre de courbure du premier ordre C de la base.

Le centre O_3 s'obtient en prolongeant O_1O_2 de sa propre longueur en V et en projetant le

centre de courbure du second ordre c' sur la parallèle à la tangente par v.

Si les courbes c, H, sont des cercles, le point o_3 se trouve en ligne droite avec $o_1 o_2$: c'est le cas des épicycloïdes. Si de plus $R_H = \frac{R_c}{2}$, c'est-à-dire si la courbe roulante est un cercle roulant dans un cercle de rayon double, o_2 qui coïncide avec le centre de ce dernier cercle est un point fixe, et comme d'ailleurs o_3 coïncide alors avec o_1, d'après une remarque précédemment faite, les diamètres de toutes les trajectoires passent constamment par un point fixe : ces trajectoires sont des ellipses.

Centres secondaires.

Nous nous bornerons à quelques mots sur ce qui concerne les relations beaucoup plus complexes liant entre eux les centres secondaires : énonçons seulement les deux propositions suivantes :

1°. – Dans un mouvement géométriquement défini, la connaissance de ω et de ses $(n-1)$ premières dérivées équivaut à celle des n premiers centres secondaires.

2°. – Si l'on suppose déterminés les $n-1$ premiers centres le $n^{ème}$ n'est pas arbitraire, et son lieu est un cercle passant par o_1 [1]

---

[1] Ce cercle est le lieu des points pour lesquels étant donné le mouvement géométrique et les $n-1$ premiers centres, l'accélération normale d'ordre $n-1$ est nulle.

En général on peut disposer de $\frac{d^n\omega}{dt^n}$ pour que θ_n soit une quantité réelle (pourvu que n soit supérieur à 1), on obtient ainsi un certain centre ω'_n qui jouit de cette propriété que toutes les accélérations correspondantes convergent vers lui : le lieu des centres secondaires ω_n est le cercle décrit sur $\omega'_n o_1$ comme diamètre.

Si les $n-1$ premiers centres sont des centres principaux, selon que n est pair ou impair, ω'_n coïncide avec o_n ou est à l'infini sur la direction perpendiculaire à $o_1 o_n$. Le lieu des centres secondaires ω_n est dans ce dernier cas la droite $o_1 o_n$ elle-même.

Relations entre les centres principaux de divers mouvements liés entre eux d'une façon remarquable.

1°. Mouvements réciproques — Étant données deux courbes C, K, tangentes entre elles en un de leurs points, si partant de cette position initiale on fait rouler la première courbe sur la seconde ou la seconde sur la première on obtient deux mouvements qui peuvent être dits réciproques l'un de l'autre.

Étant donnés à un instant quelconque les centres principaux $\bar{\varphi}_n$ du premier mouvement, ceux $\bar{\psi}_n$ du second sont déterminés par la relation :

$$(E) \qquad \bar{\psi}_{p+1} - \bar{\psi}_p = (-1)^p \left[\bar{\varphi}_{p+1} - \tfrac{p}{1}\bar{\varphi}_p + \cdots\cdots \pm \bar{\varphi}_1\right]$$

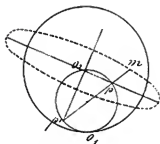
qui permet de les construire de proche en proche. On trouve en supposant $\bar{\varphi}_1 = \bar{\psi}_1 = 0$:

$$(e) \qquad \bar{\psi}_2 = -\bar{\varphi}_2$$

$$(e') \qquad \bar{\psi}_3 = \bar{\varphi}_3 - 3\bar{\varphi}_2 \qquad \text{etc}$$

Si dans le premier mouvement une courbe M a pour enveloppe une courbe M' dans le mouvement réciproque, la courbe M' devenue mobile enveloppe la courbe M.

Si la trajectoire décrite par un point a dans le premier mouvement rencontre en n points réels une droite A du plan fixe, dans le mouvement réciproque la droite A passera n fois par le point a, c'est-à-dire que du point a on pourra mener à l'enveloppe de A n tangentes réelles.

Un exemple remarquable de mouvements réciproques est fourni par le mouvement à trajectoires elliptiques déjà signalé plus haut.

Ce mouvement est produit par le roulement d'un cercle K dans un cercle o_2 de rayon double. Tous les points du petit cercle décrivent des diamètres du grand cercle[1], tous les cercles ayant leurs centres sur le petit cercle enveloppent des droites : tout point mobile m décrit une ellipse dont o_2 est le centre et dont les axes sont faciles

---

(1) Ces diamètres doivent être considérés comme des ellipses infiniment aplaties

à l'heure ; car pp' étant le diamètre du petit cercle qui passe en m, $o_2 p$ et $o_2 p'$ sont les directions de ces axes, mp, mp' leurs grandeurs.

Dans le mouvement inverse c'est le cercle o_2 qui roule sur le cercle K. Tout diamètre du grand cercle passe en un point fixe qui est sa seconde intersection avec le petit cercle : toute droite mobile enveloppe un cercle ayant son centre sur le petit cercle : enfin tout point mobile m décrit un limaçon de Pascal, car le rayon mo_2 passe par un point fixe p et la longueur mo_2 est constante [1].

2° _ Mouvements relatifs. _ Un point m de rayon u appartient à un système invariable A qui se déplace par rapport à un autre système B ;

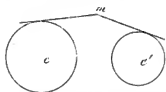
Pendant ce temps, le système B est animé lui-même d'un mouvement quelconque.

On demande : connaissant les centres instantanés φ_n du mouvement de B et $\bar{\varphi}_n$ du mouvement de A relativement à B supposé fixe, de déterminer les centres $\bar{\Phi}_n$ dans le mouvement absolu de A.

Appelons $\bar{\theta}$ $\bar{\tau}$ et $\bar{\Theta}$ les fonctions $\bar{\theta}$ dans ces trois mouvements. La solution de la question est donnée par les formules :

$$(F)\quad \begin{aligned} \bar{\Theta}_n &= \bar{\theta}_n + \frac{n}{1}\bar{\theta}_{n-1}\bar{\tau}_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}\bar{\theta}_{n-2}\bar{\tau}_2 + \dots\dots + \bar{\tau}_n \\ \bar{\Theta}_n\bar{\Phi}_n &= \bar{\theta}_n\varphi_n + \frac{n}{1}\bar{\theta}_{n-1}\bar{\tau}_1\bar{\varphi}_1 + \dots\dots\dots\dots + \bar{\tau}_n\bar{\varphi}_n \end{aligned}$$

que l'on peut écrire symboliquement :

---

[1] Le limaçon se présente aussi comme conchoïde de cercle. _ Mais mieux deux droites quelconques menées par m enveloppent deux cercles, on voit que la trajectoire du point m peut être également considérée comme lieu du sommet d'un angle constant dont les côtés touchent deux circonférences.

$$(F') \qquad \begin{aligned} \bar{\Theta}_n &= (\bar{\theta} + \bar{\tau})^n \\ \bar{\Phi}_n &= \left(\frac{\bar{\theta}\bar{\varphi} + \bar{\tau}\bar{\psi}}{\bar{\theta} + \bar{\tau}}\right)^n \end{aligned}$$

si l'on convient de remplacer dans le développement les exposants par des indices et les puissances de φ inférieures à n par l'unité (1).

C. Conchoïdes.

On appelle Conchoïdes d'une courbe par rapport à un point les différentes courbes que l'on obtient en portant une longueur constante sur des rayons issus du point fixe, à partir de leur rencontre avec la courbe donnée.

On voit d'après cette définition que la théorie des roulettes s'applique immédiatement à l'étude des Conchoïdes.

D. Podaires.

On appelle Podaire d'une courbe plane relativement

---

(1) La démonstration des relations F' est fondée sur la formule suivante que je crois intéressant de donner ici — d, ∂ et D représentant les différentielles géométriques correspondant aux trois mouvements définis plus haut, et $\bar{u}$ étant le rayon vecteur d'un point mobile, on a :

$$\frac{D^n\bar{u}}{dt^n} = \frac{d^n\bar{u}}{dt^n} + \frac{n}{1}\bar{\theta}_{n-1}\frac{\partial\bar{u}}{dt} + \frac{n(n-1)}{1.2}\bar{\theta}_{n-2}\frac{\partial^2\bar{u}}{dt^2} + \dots + \frac{\partial^n\bar{u}}{dt^n}$$

$$= \frac{d^n\bar{u}}{dt^n} + \sum_{p=1}^{p=n}\frac{n(n-1)\dots\dots(n-p+1)}{1.2.3\dots\dots p}\bar{\theta}_{n-p}\frac{\partial^p\bar{u}}{dt^p}$$

C'est l'expression générale de l'accélération absolue dans le mouvement relatif d'un point.

à un point le lieu des pieds des projetantes abaissées de ce point sous un angle constant sur les tangentes à la courbe.

La podaire est dite orthogonale lorsque l'angle constant est égal à $\frac{\pi}{2}$: elle est dite oblique dans le cas contraire.(1)

D'après cette définition, l'étude des podaires n'est qu'un cas particulier du problème qui consiste à trouver le lieu du sommet d'un angle constant dont les côtés glissent sur deux courbes données, et ce problème lui-même rentre dans celui des roulettes.

Les centres $o_1 o_2 o_3$ de ce dernier mouvement peuvent s'obtenir par les constructions suivantes :

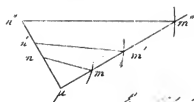
Soient $C\,C'$ les deux courbes, ρ_1 et ρ_2, ρ'_1 et ρ'_2 leurs centres de courbure respectifs du premier et du second ordre. Prolongeons les normales jusqu'à leur intersection, nous obtiendrons o_1. Faisons passer un cercle par $o_1 \rho_1 \rho'_1$ et prolongeons le diamètre de ce cercle qui passe en o_1 d'une longueur égale à la sienne au-delà de ce dernier point, nous obtiendrons o_2. Enfin menons par $\rho_2 \rho'_2$ des parallèles aux normales, nous obtiendrons par leur rencontre un point K : si à partir de ce point nous portons sur une parallèle à $o_1 o_2$ une longueur égale au triple de $o_1 o_2$, nous obtiendrons o_3.

---

(1) Il est d'ailleurs facile de voir que toutes les podaires d'une courbe par rapport à un même point sont des courbes semblables entre elles.

Remarquons encore au sujet des podaires que parmi les caustiques secondaires d'un point p relativement à une courbe M, il y en a toujours une dont tous les points sont symétriques de p par rapport aux tangentes à M, et que cette caustique secondaire est par conséquent homothétique à la podaire.

E. Deux théorèmes sur les sous-normales.

Théorème I^er^. — Lorsque trois courbes A B C interceptent sur des rayons issus d'un point fixe μ des segments mm', $m'm''$ qui sont entre eux dans un rapport constant, les normales à ces courbes interceptent sur la perpendiculaire au rayon vecteur élevée en μ des segments nn', $n'n''$ qui sont entre eux dans un rapport égal au précédent.

Ce théorème résulte immédiatement de ce que les sous-normales en coordonnées polaires sont les dérivées du rayon vecteur par rapport à l'angle.

En effet, de la relation permanente :

$$mm' = K\, m'm''$$

on déduit :

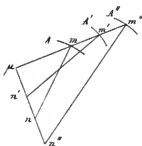
$$\frac{d\,mm'}{d\omega} = K \frac{d\,m'm''}{d\omega}$$

c. a. d.

$$nn' = K\, n'n''.$$

Théorème II. — Lorsque trois courbes A B C interceptent sur des rayons issus d'un point fixe μ des segments mm', $m'm''$ dont le produit est constant, les normales à ces courbes interceptent sur la perpendiculaire au rayon vecteur en μ des segments nn', $n'n''$ qui sont entre eux dans le rapport de mm' à $m'm''$ changé de signe.

Car si l'on a constamment

$$mm' \times m'm'' = K$$

on en déduit :

$$\frac{d\,mm'}{d\,m'm''} = -\frac{mm'}{m'm''}$$

c. à d. $$\frac{nn'}{n'n''} = -\frac{mm'}{m'm''}$$

Les deux théorèmes s'étendent évidemment au cas où la droite μm au lieu de pivoter autour du point fixe μ toucherait en μ son enveloppe.

Et si cette enveloppe se confondait avec l'une des trois courbes considérées, la courbe A par exemple, il est facile de reconnaître que le point n deviendrait le centre de courbure de cette courbe.

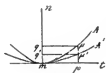
F. Déformation locale.

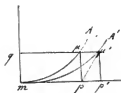
Nous désignons ainsi les transformations qui s'appliquent non pas à l'étude d'ensemble d'une courbe, mais à la recherche de ses éléments caractéristiques en un point particulier.

Nous citerons les deux théorèmes suivants dus à M. Charles Dupin :

Théorème I. Étant rapportée une courbe A à sa tangente mt et à sa normale mn, si l'on construit une nouvelle courbe A' en multipliant par une constante quelconque les ordonnées de la première, les deux courbes sont évidemment tangentes en m et leurs rayons de courbure seront dans le rapport inverse de leurs ordonnées.

Reportons-nous en effet à la seconde expression du rayon de courbure donnée dans le cours et nous aurons :

$$2\rho = \frac{\overline{\mu q}^2}{\mu p} \qquad 2\rho' = \frac{\overline{\mu' q'}^2}{\mu' p}$$

d'où $$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\mu' p}{\mu p}$$ c. q. f. d.

Théorème II. Si l'on construit la courbe A' en menant par le pied de l'ordonnée μp une oblique sous un angle constant et la prolongeant jusqu'à sa rencontre avec l'horizontale du point μ, la courbe A' et la courbe A ont même cercle osculateur.

En effet, les rayons de courbure sont :

$$2\rho = \frac{\overline{\mu q}^2}{\mu p}$$

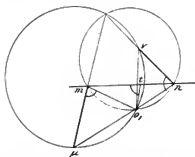
$$2\rho' = \frac{\overline{\mu' q}^2}{\mu' p'} = \frac{(\mu q + \mu' \mu)^2}{\mu p} = \frac{(\mu q + \mu p \,\mathrm{tg}\, \mu p \mu')}{\mu p}$$

et comme $\mu p \,\mathrm{tg}\, \mu p \mu'$ est négligeable à côté de μq, l'égalité annoncée en résulte.

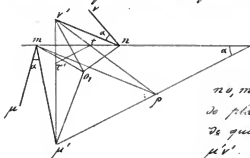
Remarque. — Dans ces deux modes de transformation, les diamètres des courbes transformées se déduisent de ceux des courbes primitives par la loi de déformation des courbes elles-mêmes.

Comme exemple de déformation locale, nous citerons encore la solution 2 donnée plus loin pour la tangente à la courbe d'ombre de la vis à filet triangulaire.

G. Applications.

I. Enveloppe d'une droite connaissant en grandeur et en direction les vitesses de deux points constamment situés sur cette droite.

Soient m, n les deux points $m\mu$, $n\nu$ leurs vitesses ; nous pouvons considérer le segment mn comme une figure qui se déplace en restant semblable à elle-même. Nous savons construire son centre instantané o_1 (page 64). Le point t où la droite touche son enveloppe doit avoir sa vitesse dirigée suivant cette droite même, on n'a donc pour l'obtenir qu'à mener par o_1 une droite faisant avec mn un angle égal à celui que fait $m\mu$ avec $o_1 m$.

La solution précédente peut être modifiée et généralisée.

Supposons qu'au lieu de connaître les vitesses $m\mu$ et $n\nu$ par leurs grandeurs portées sur les tangentes aux trajectoires, la figure donne seulement des longueurs $m\mu'$, $n\nu'$ proportionnelles à ces vitesses et portées sur des obliques faisant avec les tangentes aux trajectoires un même angle α.

D'après la propriété du centre instantané O_1, le triangle $\nu' O_1 \mu'$ est semblable au triangle $n O_1 m$, en sorte que si n changeait de place sur mn, ν' se déplacerait de quantités proportionnelles sur $\mu'\nu'$. Si donc n vient à coïncider avec le point t où mn touche son enveloppe, le point ν' sera venu en un point τ' qui divisera $\mu'\nu'$ dans le rapport même dans lequel t divise mn, et comme de plus $t\tau'$ doit faire avec mn l'angle α, on voit que la solution du problème revient à trouver une droite faisant avec mn l'angle α et divisant $\mu'\nu'$ et mn dans le même rapport.

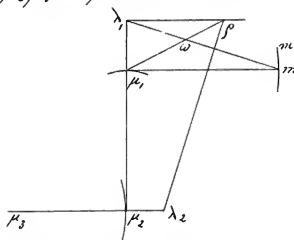
Pour cela menons par m une parallèle $m\rho$ à $n\nu'$ et par μ' une parallèle à la direction de la ligne cherchée: cette dernière rencontre $m\rho$ en ρ et $\nu'\rho$ coupe mn en t, car si par t ainsi obtenu on mène $t\tau'$ parallèle à $\mu'\rho$ on a:

$$\frac{\mu'\tau'}{\tau'\nu'} = \frac{\rho t}{t\nu'} = \frac{mt}{tn}$$

Corollaire. On trouverait de la même façon les points où une droite autre que mn, mais passant constamment par m ou n et faisant avec mn un angle constant touche son enveloppe. Car cette droite pourrait être considérée comme liée au système mobile.

II. Détermination du centre de la courbure osculatrice à une courbe donnée

en l'un a des points.[1]

Supposons connus les rayons de courbure $m\mu_1$, $\mu_1\mu_2$ $\mu_2\mu_3$ du premier, deuxième et troisième ordre.

Nous savons que le diamètre s'obtient en prolongeant $\mu_2\mu_1$ du tiers de sa longueur au delà de μ_1 et en joignant à m le point λ_1 ainsi obtenu.

Le centre ω de la conique osculatrice est évidemment le point d'intersection de deux diamètres consécutifs, c'est-à-dire le point où le diamètre touche son enveloppe.

Pour déterminer ce point, considérons le segment de droite $m\lambda_1$ comme une figure mobile qui se déplace en restant semblable à elle-même : soient $\bar{u}$ $\bar{v}$ et $\bar{w}$ les rayons vecteurs des points m, λ_1 et du point avec lequel ω coïncide.

On a d'abord :

$$(a) \qquad \bar{u} - \bar{w} = K(\bar{u} - \bar{v})$$

en appelant K la valeur réelle du rapport constant dans lequel le point $\bar{w}$ divise $m\lambda_1$.

Différentiant cette relation permanente, il vient :

$$(b) \qquad d\bar{u} - d\bar{w} = K(d\bar{u} - d\bar{v})$$

D'ailleurs le déplacement du point $\bar{w}$ s'effectuant dans la direction même de $\lambda_1 m$

$$(c) \qquad d\bar{w} = g(\bar{u} - \bar{v})\,d\varphi$$

g étant une autre constante réelle et $d\varphi$ l'angle dont tourne la figure dans le temps dt :

Les équations (a) (b) et (c) donnent par l'élimination de $d\bar{w}$

$$(d) \qquad d\bar{u} - g\,d\varphi(\bar{u} - \bar{v}) = K(d\bar{u} - d\bar{v})$$

---

(1) D'après ce qui a été vu dans le cours la conique osculatrice est la conique ayant cinq points consécutifs communs avec la courbe donnée.

Prenons μ_1 pour origine, $\mu_1 m$ pour axe des quantités réelles et supposons que les ds positifs soient comptés dans le sens mm' sur la courbe donnée. Nous avons alors en tenant compte des signes des rayons de courbure et appelant $d\alpha$ l'angle de contingence de la courbe mm' :

$$\bar{u} = +\rho_1 \qquad d\bar{u} = +\rho_1\, d\alpha \sqrt{-1}$$

$$\bar{v} = +\frac{\rho_2}{3}\sqrt{-1} \qquad d\bar{v} = \left[-\frac{4}{3}\rho_2 + \frac{1}{3}\rho_3\sqrt{-1}\right] d\alpha$$

d'où :

$$\bar{u}-\bar{v} = \rho_1 - \frac{\rho_2}{3}\sqrt{-1}$$

$$d\bar{u}-d\bar{v} = \left[\frac{4}{3}\rho_2 + \left(\rho_1 - \frac{1}{3}\rho_3\right)\sqrt{-1}\right] d\alpha\,.$$

L'équation d où l'on introduit ces valeurs se décompose en :

$$(e)\qquad \begin{aligned} g\frac{d\varphi}{d\alpha}\rho_1 + \frac{4}{3}K\rho_2 &= 0 \\ g\frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{\rho_2}{3} + \rho_1 - K\rho_1 + \frac{K}{3}\rho_3 &= 0 \end{aligned}$$

Éliminant $g\frac{d\varphi}{d\alpha}$, on trouve.

$$(f)\qquad K = \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2 - \frac{1}{3}\rho_1\rho_3 + \frac{4}{9}\rho_2^2}$$

D'où cette construction : prolongeons $\mu_1\mu_2$ du tiers de sa longueur en λ_2, de λ_2 abaissons la perpendiculaire sur $\lambda_1 m$ et soit ρ le point où cette droite rencontre la parallèle $\lambda_1\rho$ à $\mu_1 m$: la droite $\mu_1\rho$ coupe en ω le diamètre.

Selon le signe de K la conique osculatrice est une hyperbole ou une ellipse, c'est une parabole si $K=\infty$ et si $K=0$, c'est un point ou un système de deux droites qui se coupent.

Autrement. Le point λ_1 dans le mouvement de m sur la courbe donnée décrit une certaine trajectoire dont il est facile de trouver la normale : car $\lambda_1\mu_1$ étant constamment le tiers de $\mu_1\mu_2$ cette normale d'après le théorème I page 74, doit précisément passer au point λ_2 précédemment déterminé. D'ailleurs les vitesses de m et de λ peuvent être représentées par les lignes $m\mu_1$ et $\lambda_1\lambda_2$ auxquelles elles sont normales et proportionnelles,(1) donc le point cherché

(1) parce que $\mu_1 m$ et $\mu_2\lambda_1$ tournent simultanément du même angle.

ω doit s'obtenir par l'application de la construction indiquée plus haut et qu'il est facile d'identifier avec la précédente.

III. Détermination de la tangente de la courbure et du diamètre dans quelques courbes remarquables.

α. Sections coniques.

Rappelons d'abord une propriété des sections coniques qui nous sera souvent utile.

La podaire orthogonale d'une conique relative à l'un de ses foyers est le cercle décrit sur l'axe qui passe par les foyers.

Car $op = \frac{1}{2} f'n = a$

Corollaire. Soit p_1 le second point d'intersection de fp avec le cercle: on a:

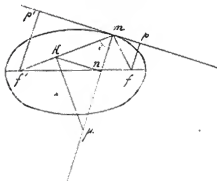
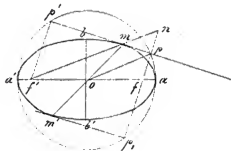
$$fp \cdot fp_1 = fa \cdot fa' = a^2 \pm c^2 = \pm b^2$$

Mais p_1 est le pied de la perpendiculaire abaissée de f sur la tangente à l'ellipse au point m' diamétralement opposé à m, fp_1 est donc égal à la perpendiculaire $f'p'$ abaissée de l'autre foyer sur la tangente en m: donc le produit des distances des foyers à une tangente est constant et égal à b^2.

Détermination du rayon de courbure.

Solutions communes aux trois courbes du second degré.

1°. Par la théorie des caustiques.

Dans les sections coniques, l'un des foyers peut être considéré comme la caustique par réflexion de la courbe relativement à l'autre foyer. Il résulte de cette remarque et de la propriété du centre de jonction une construction simple du rayon de

courbure de ces courbes.

Cette construction se traduit par une élégante expression du rayon de courbure : appelant i l'angle de la normale avec les rayons vecteurs on a d'après la formule des caustiques.

$$\frac{2}{\rho \cos i} = \frac{1}{l} \pm \frac{1}{l'} = \frac{l \pm l'}{ll'}$$

mais $l \pm l' = 2a$, et si h et h' sont les distances des foyers à la tangente en m,

$$ll' = \frac{hh'}{\cos^2 i} = \frac{b^2}{\cos^2 i}.$$

donc enfin en appelant p le paramètre $\frac{b^2}{a}$ de la conique :

$$(\alpha) \qquad \rho = \frac{p}{\cos^3 i}.$$

On peut encore transformer cette formule en y remplaçant $\cos i$ par son expression en fonction de la normale mn, en appelant n cette normale, on a d'après la figure : $\qquad n = p \cos^2 i$

et cette valeur portée dans la première expression du rayon de courbure donne

$$(b) \qquad \rho = \frac{n^3}{p^2} \qquad (1)$$

2°. Par le théorème de Jacobi.

Ce théorème s'énonce ainsi :

Dans le quadrilatère formé par les quatre points d'intersection d'une conique et d'un cercle, les bissectrices des angles que font les côtés opposés sont parallèles aux axes de la conique.(2)

En l'appliquant au cas particulier du cercle osculateur, on reconnaît que les axes sont bissectrices de l'angle formé par la

---

(1) La comparaison des formules a et b montre immédiatement que la projection de la normale sur l'un des rayons vecteurs est constante et égale à p

(2) Ce théorème résulte immédiatement de l'équation générale $S + H\alpha\beta = 0$ qui représente toutes les coniques passant par les intersections du cercle S et des droites $\alpha\beta$. Si les axes coordonnées ont été choisis de façon à ce que les droites α β soient également inclinées sur eux, les coniques se trouvent rapportées à des parallèles à leurs axes.

tangente en un point et la corde qui va de ce point au quatrième point d'intersection du cercle osculateur avec la courbe.

Connaissant les axes, il est donc facile de construire ce quatrième point et le cercle osculateur est ainsi déterminé.

3°. Par les théorèmes de M. Dupin sur la déformation locale.

Soit d'abord une ellipse rapportée à son sommet. Réduisant les ordonnées dans le rapport $\frac{b}{a}$, nous obtenons un cercle de rayon b: donc le rayon de courbure de l'ellipse en son sommet a est :

$$\rho_a = \frac{b^2}{a} = p$$

Soit maintenant une ellipse rapportée à sa tangente et au diamètre conjugué en l'un quelconque de ses points.

D'après le théorème II de la page 75 nous pouvons sans changer la courbure relever toutes les ordonnées de façon à les rendre perpendiculaires aux abscisses et cela sans que le rayon de courbure soit modifié. Nous obtenons ainsi une ellipse rapportée à son sommet : donc d'après ce qui vient d'être démontré, le rayon de courbure cherché est :

$$\rho = \frac{\overline{\omega\delta}^2}{\omega c} = \frac{\overline{od}^2}{oh} = \frac{d^2}{h}$$

Le rayon de courbure est égal au carré du demi-diamètre conjugué divisé par la distance du centre à la tangente.

Cette formule que nous venons de démontrer dans le cas de l'ellipse peut être facilement étendue à l'hyperbole : il suffit de s'assurer pour justifier cette extension

que la valeur $\frac{b^2}{a}$ trouvée pour le rayon de courbure au sommet est applicable à l'hyperbole : vérification facile à faire d'après l'une des expressions précédemment données.

Des formules (a) et (b) résultent des constructions simples et qu'il sera commode d'employer toutes les fois que le diamètre aboutissant au point c dont on cherche le rayon de courbure ainsi que son conjugué od faciles à déterminer sur la figure.

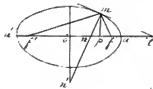
Il suffira alors d'abaisser du centre la perpendiculaire oh sur la tangente en c, de joindre d au point h et d'abaisser du point d'intersection t des tangentes en c et en d la perpendiculaire sur dh pour obtenir par l'intersection de cette dernière droite avec la normale en c le centre de courbure γ relatif à ce point.

Dans le cas où le point c est l'un des sommets, la même construction donne à la fois les centres de courbure α et β correspondant aux extrémités des deux axes.

4° Par l'application du théorème I sur la sous-normale.

Soit m un point d'une conique, mn la normale, mt la tangente en ce point.

Le faisceau harmonique $m(ff'nt)$ donne

$$on \times ot = of^2 = c^2$$

Si d'autre part on abaisse mp perpendiculaire sur le grand axe, cette droite étant la polaire de t, les points p et t sont conjugués harmoniques avec les sommets aa' et l'on a :

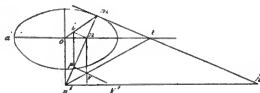
$$op \cdot ot = oa^2 = a^2$$

Divisant membre à membre ces deux équations, on obtient

$$\frac{on}{op} = \frac{c^2}{a^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{mn}{mn'} = \frac{b^2}{a^2}$$

donc les deux axes de la conique déterminent sur la normale à la courbe des segments qui sont dans un rapport constant égal à $\frac{b^2}{a^2}$ (1). Donc d'après le théorème I sur les sous-normales, la perpendiculaire à la normale élevée au centre de courbure μ doit rencontrer les perpendiculaires $n\nu$ $n'\nu'$ élevées en n et n' sur les axes en des points ν et ν' tels que

$$\frac{\mu\nu}{\mu\nu'} = \frac{mn}{mn'}$$

mais alors si l'on prolonge mt jusqu'à sa rencontre en h avec $n'\nu'$, le rapport de mt à mh étant égal à celui de mn à mn' la droite $n't$ doit précisément rencontrer $n\nu$ en ν : le centre de courbure se trouve ainsi déterminé.

Cette construction peut encore se simplifier en remarquant que si l'on élève en n la perpendiculaire à mn et qu'on la termine en i à sa rencontre avec om, ni est parallèle et égal à $\mu\nu$ comme étant avec mt dans le même rapport que cette dernière ligne : la figure $n\nu\mu i$ est donc un parallélogramme et pour construire μ, il suffira de déterminer le point i comme il vient d'être dit, et de mener par ce point une parallèle à l'axe sur lequel est situé le point n'.

5°. Par une propriété des cordes focales.

Rappelons quelques propriétés des cordes focales $\delta\delta'$ étant une corde focale, dd' le diamètre parallèle, cc' son conjugué, p le paramètre $\frac{b^2}{a}$ de la conique, on a :

$$\frac{1}{f\delta} + \frac{1}{f\delta'} = \frac{2}{p}.$$

---

(1) Ce théorème combiné avec la remarque de la page 81 montre que la projection sur les rayons vecteurs de la portion de normale comprise entre le petit axe et la courbe est constante et égale au demi-grand axe.

$$\delta\delta' = \frac{2\overline{od}^2}{a} = \frac{2fc.fc'}{a} \quad (1)$$

Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de ces relations qui n'offre ni difficulté ni intérêt.

En combinant la seconde avec la formule:

$$\frac{1}{fc} + \frac{1}{fc'} = \frac{2}{f\alpha} = \frac{4}{c\gamma}$$

on arrive facilement à l'égalité :

$$c\gamma = \delta\delta'$$

qui fournit un moyen de construire le cercle osculateur.

Solutions spéciales.

1°. à l'ellipse — en considérant l'ellipse comme une épicycloïde et appliquant la construction de Savary.

2°. à la parabole. Le cercle osculateur en un point m détermine sur le diamètre qui passe en ce point un segment égal au double du paramètre p' relatif à ce diamètre (2)

Soit en effet $n p n'$ une corde conjuguée du diamètre $m m'$, le cercle des trois points $m n n'$ rencontre le diamètre en ρ tel que :

$$pm \times p\rho = \overline{np}^2$$

comme : $\overline{np}^2 = 2p'.pm$

$$p\rho = 2p'.$$

---

(1) La relation $\delta\delta' = \frac{2\overline{od}^2}{a}$ montre que :

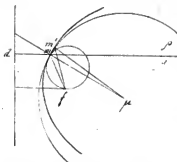
La somme de deux cordes focales parallèles à deux diamètres conjugués est constante.

La somme des carrés de deux cordes focales rectangulaires est constante.

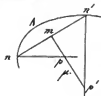
L'égalité $\overline{od}^2 = fc.fc'$ résulte immédiatement du théorème d'Apollonius combiné avec l'expression de la médiane oc dans le triangle fcf'.

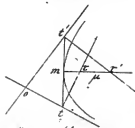
(2). Le paramètre p' est égal à $p + 2x$, p étant le paramètre principal, x la distance du point m à la tangente au sommet. La formule trouvée page 12 pour le rayon de courbure fait voir que

Supposons que la sécante nn' se rapproche de plus en plus de la tangente, le cercle devient osculateur et le théorème se trouve démontré.

Le cercle décrit sur le demi rayon de courbure comme diamètre passe au foyer. Car si l'on considère les deux normales consécutives $m\mu$ $m'\mu$ qui concourent au centre de courbure, il est facile de reconnaître que l'angle mfm' est double de l'angle $m\mu m'$.

Si l'on prolonge la normale jusqu'à la directrice, la portion de cette normale comprise entre la directrice et la courbe est égale à la moitié du rayon de courbure.

En effet la corde mo interceptée par le cercle osculateur sur le diamètre du point m est égale à $2p'$ ou $2p+4x$ c'est-à-dire à $4md$.

3°. à l'hyperbole. Le rayon de courbure de l'hyperbole peut se déterminer très-simplement par l'application du théorème suivant :

Lorsqu'une corde mobile à l'intérieur d'une courbe A détache un segment nAn' d'aire constante, cette corde touche son enveloppe en son milieu, et le centre de courbure de cette enveloppe est le milieu des points pp' où sa normale est rencontrée par les normales à la courbe menées en n et en n'.

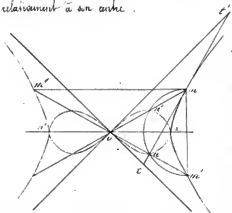
La première partie du théorème se voit immédiatement en donnant à la corde un déplacement infiniment petit et exprimant que l'aire du segment est invariable ; la seconde résulte du 1er théorème sur les sous-normales.

En appliquant ce résultat à l'hyperbole et à ses asymptotes, on a une construction très-élégante du rayon de courbure (Mannheim)

Diamètres et centre. Le diamètre et le centre étant directement connus dans les sections coniques, leur connaissance permettra de déterminer les centres de courbure du second et troisième ordre par les constructions inverses de celles précédemment indiquées

---

le théorème énoncé pour la parabole est général pour toute section conique si l'on appelle paramètre en un point la quantité $\frac{N^2}{l}$

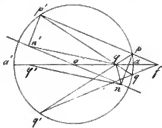
6. Lemniscate.

La lemniscate est la podaire orthogonale d'une hyperbole équilatère relativement à son centre.

Soit n un point de la lemniscate, m le point correspondant de l'hyperbole. On sait que la tangente à l'hyperbole détache dans l'angle des asymptotes un triangle tot' d'aire constante et touche l'hyperbole au milieu m de tt'. De plus l'hyperbole étant dans le cas actuel équilatère, il résulte d'une propriété bien connue du triangle rectangle que la médiane om et la hauteur on sont également inclinées sur la bissectrice de l'angle droit, c'est-à-dire sur l'axe transverse de l'hyperbole. Si donc on prolonge on, cette droite rencontre l'hyperbole en deux points m' m'' symétriques de m par rapport aux axes et l'on voit que le cercle décrit sur toute corde de l'hyperbole perpendiculaire à l'un des axes coupe les diamètres aboutissant à ses extrémités en deux points qui appartiennent à la lemniscate.

L'aire du triangle tot' égale à $\overline{oa}^2$ ou a^2 est aussi égale à $\frac{tt' \times on}{2}$. Mais $tt' = 2om = 2om'$. Donc:

$$on \cdot om' = a^2$$

c'est-à-dire que la lemniscate est la courbe réciproque de l'hyperbole équilatère relativement à son centre.

Abaissons du foyer de l'hyperbole une perpendiculaire sur la tangente: le pied de cette perpendiculaire se trouve comme l'on sait sur le cercle décrit sur l'axe aa' comme diamètre. La lemniscate peut donc se construire en menant par l'un des foyers de l'hyperbole des sécantes au cercle décrit sur l'axe aa' et projetant les intersections de ces sécantes avec

le cercle sur les parallèles menées par le centre[1]

Prenons q au milieu de of. Ce point est précisément le conjugué harmonique de f par rapport à aa'. Si donc on mène la sécante fqq' symétrique de fpp', pq' et $p'q$ se coupent en q, et $qp' = qq'$. Donc :

$$qp.qp' = qp.qq' = qa.qa' = \frac{a^2}{2}.$$

mais q étant le milieu de of, $qp = qn$, $qp' = qn'$ et l'égalité précédente peut s'écrire :

$$qn.qn' = \frac{a^2}{2}$$

ou bien encore. $qn.q'n = \frac{a^2}{2}$.

en appelant q' le point symétrique de q par rapport au centre. Ainsi : le produit des rayons vecteurs qui vont de deux points fixes q, q' à un point de la courbe est constant et égal au carré de la distance de ces deux points au centre.

Les points q q' sont dits les foyers de la lemniscate[2]

D'après une remarque générale et qui résulte immédiatement de la définition même des podaires, lorsque une courbe roule sur une courbe qui lui est symétrique par rapport à leur tangente commune, la trajectoire d'un point m lié à la courbe mobile est homothétique à la podaire de la courbe fixe relative au point m' symétrique de m.

Donc en particulier lorsqu'une hyperbole équilatère roule sur sa symétrique, son centre décrit une lemniscate.

Dans le roulement que nous venons de définir, les deux foyers de l'hyperbole mobile décrivent deux cercles dont les

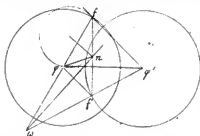
---

(1) Une construction analogue s'applique évidemment à toute podaire de section conique en remplaçant seulement le centre du cercle par le point par rapport auquel est prise la podaire.

Si la conique est une parabole, le cercle se remplace par une droite.

(2) Par cette propriété la lemniscate se présente comme cas particulier des ovales de Cassini, lieux des points dont les distances à deux points fixes ont un produit constant.

centres sont les foyers de l'hyperbole, et qui a le double de l'axe transverse pour rayon. Donc :

Si les extrémités d'une droite de longueur constante c se meuvent sur deux circonférences égales dont les rayons soient $\frac{c}{\sqrt{2}}$ et les centres distants de c, le point milieu de la droite mobile décrit une lemniscate dont les centres des cercles sont les foyers.

Soient $\varphi\varphi'$ ces derniers points, ff' une position de la droite mobile; prolongeons φf, $\varphi' f'$ jusqu'à leur rencontre en ω : ce point est le centre instantané du mouvement. Joignons-le au point n qui décrit la lemniscate : le triangle $\omega f f'$ nous donnera, par la propriété de la médiane :

$$2\,\overline{\omega n}^2 + 2\,\overline{fn}^2 = \overline{\omega f}^2 + \overline{\omega f'}^2$$

mais $2\overline{fn}^2 = \overline{f\varphi}^2$ et $\omega f' = (\omega f - f\varphi)$

donc, en réduisant :

$$\overline{\omega n}^2 = \overline{\omega f}^2 - \omega f \cdot f\varphi = \omega\varphi \cdot \omega f$$

c'est-à-dire que la normale à la lemniscate est tangente en n au cercle des trois points $\varphi f n$ [1]

L'énoncé suivant en résulte :

Si dans un système articulé $\varphi f n$ les longueurs des tiges φf et fn sont entre elles dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1 et si le point φ étant fixe, l'extrémité n se déplace constamment suivant le rayon qui va de ce point au centre du cercle circonscrit au triangle $\varphi f n$, le lieu que décrit le point n est une lemniscate dont φ est l'un des foyers et $2fn$ la distance focale.

En changeant dans cet énoncé le rapport des côtés φf et fn, on obtiendrait la définition générale (Serret) de la première classe des courbes dont les arcs sont exprimables en fonction du rayon vecteur par des intégrales elliptiques de première espèce [2]. La lemniscate

---

(1) On peut remarquer que le cercle $\varphi f n$ est également tangent à la droite φ' en f : en effet les relations qui existent entre les longueurs ff', $f\varphi$ et fn montrent que les triangles $fn\varphi$, $f\varphi f'$ sont semblables : l'égalité des angles $ff'\varphi$, $f\varphi n$ en résulte ; mais $f\varphi$, $f\varphi$ étant parallèles, les angles $ff'\varphi$, $f\varphi'$ sont aussi égaux ; donc, etc.

(2) Il est à remarquer qu'une même courbe correspond à deux systèmes qui sont l'inverse l'un de l'autre.

Cours de Géométrie descriptive de M. Haag (Sorbonne) Leçon 23

se trouve ainsi rattachée à cette classe de courbes.

Mentionnons une propriété commune à toutes ces courbes : l'aire du triangle générateur qfn est égale (à une constante près) à l'aire balayée par le rayon vecteur de la courbe . . .

En effet, lorsqu'on passe d'une position à la position infiniment voisine, la variation de l'aire du triangle qfn est égale à :

$$qnn' + ff'nn' - qff'$$

mais si l'on appelle ω le centre instantané du déplacement de fn, les triangles ωfn $\omega f'n'$ étant égaux, on a :

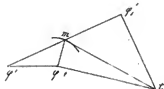
$$ff'nn' = \omega nn' - \omega ff'$$
$$= \frac{1}{2}(\omega n^2 - \omega f^2)\,d\theta$$

et comme ωn est la tangente en n au cercle fqn,

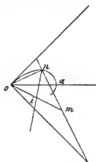
$$ff'nn' = \frac{1}{2}\omega f \times fq\, d\theta = \frac{1}{2} ff' \times fq = qff'$$

Donc, en somme, la variation de l'aire du triangle générateur est égale à l'accroissement de l'aire balayée par le rayon vecteur de la courbe, ce qui démontre le théorème.

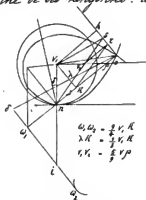
Tangente, courbure et diamètre. Les nombreuses propriétés de la lemniscate que nous venons de démontrer, conduisent facilement à la détermination de la tangente, de la courbure et du diamètre en un point de cette courbe.

Ainsi en appliquant au théorème sur le produit des rayons vecteurs un raisonnement tout analogue à celui qu'on emploie pour les sections coniques, on obtient pour la tangente la construction suivante, applicable aux ovales de Cassini en général : prolongeons $q'm$ de sa propre longueur en q'_1, élevons en q et en q'_1 des perpendiculaires aux rayons vecteurs, ces perpendiculaires se coupent en un point de la tangente.

Mais la construction la plus simple de la tangente et du cercle osculateur résulte immédiatement

de la définition de la lemniscate comme podaire d'hyperbole équilatère.

En effet, reprenons la figure de la page 87 : la normale à la lemniscate s'obtiendra en joignant le point n de la courbe au milieu i de om. donc les angles ino, ion sont égaux, et comme oa est bissectrice de ion, on en conclut que la normale à la lemniscate fait avec le rayon vecteur on un angle double de celui que fait ce rayon vecteur avec l'axe transverse de l'hyperbole (1).

Si l'on prend maintenant deux points n et n' sur la courbe, les normales en ces points feront entre elles un angle $n\nu n'$ qui sera triple de l'angle non'.

Supposons les deux points n et n' infiniment voisins, ν devient le centre de courbure et l'on voit que le cercle osculateur en un point de la lemniscate détache sur le rayon qui va de ce point au centre une corde égale aux deux tiers de ce rayon vecteur.

Enfin le diamètre peut se déterminer de la manière suivante : supposons que la lemniscate roule sur une de ses tangentes : le centre o décrira une courbe qui d'après la construction de Savary aura son rayon de courbure constamment égal aux $\frac{3}{2}$ de sa normale. En appliquant à cette courbe, à sa développée et à la base du roulement le théorème I^{er} sur les sous-normales, on détermine facilement le centre de seconde courbure, et par suite le diamètre de cette courbe. La construction générale du diamètre.

$\omega_1\omega_2 = \frac{9}{4} \nu_1 K$
$\lambda K = \frac{1}{8} \nu_1 K$
$\nu_1 \nu_2 = \frac{5}{9} \nu \rho$

---

(1) On remarquera comme conséquence de cette propriété que si les côtés d'un angle constant glissent sur la lemniscate, la corde de cet angle est vue du centre de la courbe sous un angle également constant et qui est le tiers du premier

des roulettes permet alors inversement de trouver le centre principal du second ordre, c'est-à-dire le centre de courbure du second ordre de la lemniscate : on trouve pour la déviation l'expression :

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{5}{27}\frac{\rho}{D} \sin v_1 .$$

C. Épicycloïde, Cycloïde, Développante de cercle.

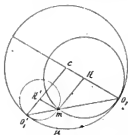
On appelle épicycloïde la trajectoire d'un point d'un cercle qui roule sur un cercle fixe[1]. Si le cercle fixe est une droite, l'épicycloïde est une cycloïde. Si le cercle roulant est une droite, l'épicycloïde est une développante de cercle.

On appelle par extension épicycloïde allongée ou raccourcie la roulette décrite par un point lié au cercle mobile sans être situé sur sa circonférence : l'épicycloïde est allongée si le point est extérieur au cercle roulant, raccourcie dans le cas contraire.

La théorie des roulettes permet de déterminer très simplement la tangente, le cercle osculateur et le diamètre des épicycloïdes.

Nous démontrerons directement les trois propriétés suivantes :

I. Toute épicycloïde peut être engendrée de deux manières différentes par un cercle roulant sur un cercle.

En effet, soient r et R les rayons du cercle roulant et du cercle fixe. Joignons le point m qui engendre l'épicycloïde au point de contact O, des deux cercles et prolongeons O_1m jusqu'en sa seconde intersection O_1' avec le cercle fixe : traçons le cercle R' tangent au cercle fixe en O_1' et passant en m. Ce cercle aura pour rayon $R - r$, et de plus si l'on appelle μ le point du cercle fixe avec lequel vient coïncider le point m par le roulement du cercle R, il est facile de vérifier que l'arc $O_1\mu$ étant égal à l'arc O_1m, l'arc $O_1'm$ est égal à l'arc $O_1'\mu$. Donc le point m appartient

---

(1) L'épicycloïde peut être également considérée comme l'enveloppe du diamètre d'un cercle roulant sur un autre cercle.

à l'épicycloïde décrite par le point m du cercle K' roulant à l'intérieur du cercle C.

II. La développée d'une épicycloïde est une épicycloïde semblable.

Du centre c du cercle fixe menons les tangentes au cercle roulant K, puis dans l'angle de ces tangentes inscrivons le cercle K' tangent à K, enfin menons le cercle C' concentrique au cercle fixe et tangent à K'. Si nous supposons que les cercles K et K' roulent sur les cercles C et C' de manière à ce que leurs centres soient toujours en ligne droite avec le point c et si nous considérons sur ces cercles roulants deux points m et m' en ligne droite avec leur point de contact o, il est aisé de voir que dans le roulement les points $m m' o$, resteront en ligne droite. Mais la droite $m o$, est la normale à l'épicycloïde du point m, la droite $m' o$, est la tangente à l'épicycloïde du point m' et comme ces épicycloïdes sont semblables le théorème est démontré.[1]

III. À un instant donné du mouvement, les diamètres de toutes les épicycloïdes décrites par les différents points du cercle mobile concourent en un même point situé sur la ligne des centres[2]

En effet soit md le diamètre de l'épicycloïde du point m : d'après la construction même de ce diamètre, le rapport $\frac{hl}{kl}$ dépend seulement des rayons r et R des deux cercles, et il en sera de même du rapport $\frac{o_1 d}{o_1 K}$ puisque le triangle $o_1 K m$ est isocèle. On trouve.

$$o_1 d = \frac{Rr}{2R+3r}$$

Dans le cas de la cycloïde, le point d est le milieu du rayon $o_1 K$.

---

(1) Dans le cas de la cycloïde, la développée est une cycloïde égale ; dans le cas de la développante du cercle, la développée est le cercle qui peut être considéré comme cas limite d'épicycloïde

(2) Il est facile de s'assurer que cette propriété s'étend aux épicycloïdes allongées ou

Dans le cas de la développante de cercle, il s'obtient en prolongeant le rayon du tiers de sa longueur : ce qui concorde bien avec la propriété générale du diamètre.

d. Caustique d'un point relativement à un cercle. Ovales de Descartes.

La caustique d'un point relativement à un cercle est la développée d'un ovale de Descartes (1) (Sturm)

Démontrons d'abord le théorème pour la caustique par réflexion. Soit f le point rayonnant ; prenons son symétrique n par rapport à une tangente au cercle : le lieu des points n sera, d'après une remarque précédente (page 74) une caustique secondaire du point f. Mais si l'on prend sur le diamètre of le conjugué f_1 de f relativement au cercle, et si par les points m f et f_1 on mène une circonférence, le produit $of \times of_1$ étant égal à $\overline{om}^2$, cette circonférence sera tangente à om en m et passera par conséquent au point n. Les triangles mf_1n, omf sont donc semblables et donnent :

$$\frac{nf_1}{mn} = \frac{mf}{of}$$

ou à cause de $mn = mf$:

$$nf_1 = \frac{\overline{mf}^2}{of} = \frac{\overline{mf}^2}{d}$$

D'ailleurs le triangle ofm donne aussi :

$$\overline{mf}^2 = r^2 + d^2 - 2r.d\,\mathrm{Cos}.\omega$$

et comme : $d \times \mathrm{Cos}.\omega + \frac{fn}{2} = om = r$

---

raccourcies décrites par tous les points situés à l'instant que l'on considère sur un même cercle tangent au cercle roulant en o, (Voir la construction générale du diamètre des roulettes (page 63))

(1) On appelle Ovales de Descartes les courbes que l'on obtient en établissant une relation linéaire entre les coordonnées bipolaires d'un point : les deux pôles sont dits foyers de l'ovale. Cette définition qui comprend celle des sections coniques comme cas particulier conduit facilement à la détermination de la tangente et de la courbure par des constructions analogues à celles que fournit la propriété des foyers et le théorème inverse de Newton dans les sections coniques.

on en conclut.

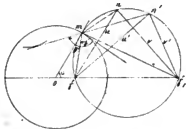
$$d \times nf_1 = r^2 + d^2 - r(2r - fn)$$

ou enfin: (a) $\quad r \times nf - d \times nf_1 = r^2 - d^2$

ce qui démontre le théorème.

On voit de plus que les foyers de l'ovale sont le point rayonnant et son conjugué sur le diamètre of.

Passons actuellement au cas de la Caustique par réfraction

D'après le théorème donné page 50) sur les caustiques secondaires, si l'on prend relativement à la bissectrice des rayons incidents et réfractés la symétrique de la tangente à la courbe dirimante et si l'on abaisse du point rayonnant une perpendiculaire sur cette droite, le lieu des intersections n' de cette perpendiculaire avec le rayon réfracté est une caustique secondaire du point f.

D'ailleurs l'égalité des angles nmn', nfn' prouve que ce point n' est situé comme le point n sur le cercle ff_1m. Appelons pour simplifier u et v, u' et v' les distances des points n et n' aux points f et f_1: les triangles $mn'f_1$, $mn'f$ donnent:[a]

$$\frac{v'}{\sin.(\omega+\theta+\theta')} = \frac{mn'}{\cos.\theta'} = \frac{-mf}{\cos.\theta}$$

d'où:

$$v' = \frac{-mf}{\cos.\theta}\left[\sin.(\omega+\theta)\cos.\theta' + \cos.(\omega+\theta)\sin\theta'\right]$$

mais

$$\cos\theta' = \frac{\cos.\theta}{n}$$

et en projetant sur fn' le contour fmn', on a:

$$-u' = fm \sin\theta' + mn' \sin.\theta = fm \sin\theta' - \frac{1}{n} fm \sin\theta$$

d'où:

$$\sin.\theta' = \frac{-u'}{fm} + \frac{1}{n}\sin.\theta$$

Portons dans l'équation précédente ces valeurs de $\cos.\theta'$, $\sin.\theta'$, nous aurons:

$$v' = u'\frac{\cos.(\omega+\theta)}{\cos.\theta} - \frac{mf}{n\cos.\theta}\left[\sin(\omega+\theta)\cos.\theta + \cos(\omega+\theta)\sin.\theta\right]$$

le triangle ofm donne d'ailleurs:

$$\frac{\cos(\omega+\theta)}{\cos\theta} = \frac{r}{d}$$

de sorte que l'équation précédente s'écrit:

$$n\left(v' - \frac{r}{d}u'\right) = \frac{mf}{\cos\theta}\sin.(\omega+2\theta)$$

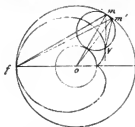
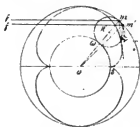
---

[a] en tenant compte du signe des angles

Le second membre étant indépendant u, il en résulte

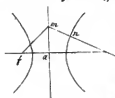
$$(b) \quad n\left(v' - \frac{r}{d}u'\right) = -\left(v - \frac{r}{d}u\right) = \frac{d^2 - r^2}{d}$$

ce qui complète la démonstration du théorème.

On remarquera que dans le cas de la réflexion, la caustique secondaire semblable à la podaire du cercle est un limaçon de Pascal : le limaçon n'est donc qu'une variété de l'ovale de Descartes. Si de plus, le point rayonnant est situé sur le cercle, le limaçon devient une Cardioïde (cas particulier où le limaçon est une épicycloïde, voir page 71). La caustique première est alors une cardioïde semblable : ce qu'il est facile de vérifier directement.

Le cas où le point f est à l'infini, c'est-à-dire où les rayons incidents sont parallèles ne rentre pas dans la démonstration précédente. S'il y a simplement réflexion, on reconnaîtra sans difficulté que la caustique est l'épicycloïde d'après, pour le cercle de rayon $\frac{R}{4}$ roulant sur le cercle de rayon $\frac{R}{2}$.

$mvm' = 2mom'$

$mK = \frac{1}{4}mo$

arc ωv = arc ωs

Enfin si le cercle dirimant se transforme en une droite, le rapport $\frac{r}{d}$ devenant égal à l'unité, la caustique secondaire est l'hyperbole :

$$u - v = \frac{2fa}{n}$$

ayant le point rayonnant pour foyer, et la droite dirimante pour axe non transverse.

Les ovales de Descartes appelés aussi courbes aplanétiques jouent un rôle considérable dans la théorie de la réfraction tant par leurs propriétés focales depuis longtemps connues que pour celles plus récemment découvertes et que nous venons de démontrer. Leur étude a été complétée dans ces derniers temps par la démonstration de propriétés nouvelles qui rattachent ces courbes aux théories les plus importantes de la géométrie moderne.

Nous mentionnerons quelques-unes de ces propriétés dont la plus remarquable consiste en ce que : Tout ovale de Descartes a outre les deux foyers qui servent à le définir, un troisième foyer

situé en ligne droite avec les deux autres, et qui associé à l'un de ceux-ci donne pour l'ovale une relation toute semblable à celle que les deux premiers foyers ont fournie (Chasles)

La considération des foyers dans l'espace qui avait déjà conduit à de remarquables propriétés des sections coniques (1) a permis de donner au résultat précédent une forme encore plus étendue et plus complète.

Considérons deux points fixes q et q' de l'espace et soit dans un plan donné un point m assujetti à la condition que ses distances ρ et ρ' aux deux points fixes soient liées par une relation de la forme :

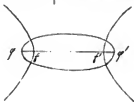
$$\rho = m\rho' + p \qquad (\alpha)$$

où m et p sont des constantes.

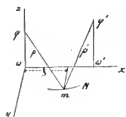
Prenons pour axes de coordonnées la projection de qq' sur le plan de la courbe, la projetante qo du point q et une perpendiculaire à ces deux premières droites.

---

(1) Rappelons les énoncés de ces beaux théorèmes dus à Charles Dupin :

Le lieu des foyers d'une section conique dans l'espace est une section conique d'espèce contraire située dans un plan rectangulaire avec celui de la première ayant les foyers de celle-ci pour sommets et ses sommets pour foyers.

Il y a réciprocité entre les deux courbes : en d'autres termes si la différence des distances de deux points de l'ellipse à chaque point de l'hyperbole est constante, la somme ou la différence des distances de deux points de l'hyperbole à chaque point de l'ellipse est constante également, (la différence se rapportant au cas où les deux foyers sont situés sur une même branche de l'hyperbole focale, et la somme au cas contraire)).

Enfin chacune des deux coniques est le lieu des sommets des cônes de révolution qui passent par l'autre courbe et les axes de ces cônes sont les tangentes à la courbe lieu de leurs sommets.

Ces théorèmes se démontrent très simplement soit par la géométrie, soit par l'analyse.

Nous aurons, en appelant ξ l'abscisse du point m, x et z les coordonnées de q', h la distance $q\omega$.

$$\rho'^2 = z^2 + x^2 + \rho^2 - h^2 - 2x\xi \qquad (\beta)$$

d'où, en tenant compte de (α) :

$$\xi = \frac{(1-m^2)\rho^2 - 2pm\rho + z^2 - x^2 - h^2 - p^2}{2x} \qquad (\gamma)$$

c'est-à-dire que l'équation de la courbe, en prenant ξ et ρ pour coordonnées, sera de la forme :

$$\xi = A\rho^2 + B\rho + C \qquad (\delta)$$

A, B, C étant des constantes.

Réciproquement si l'équation d'une courbe rentre dans la forme (δ), on aura par identification les relations

$$A = \frac{1-m^2}{2x}$$
$$B = \frac{pm}{x} \qquad (\varepsilon)$$
$$C = \frac{z^2 + x^2 - h^2 - p^2}{2x}$$

l'élimination de m et de p donnera :

$$2Cx = z^2 + x^2 - h^2 - \frac{B^2x^2}{1-2Ax} \qquad (\varphi)$$

et tout point situé sur la Courbe focale (φ) associé au point q formera un couple de foyers conjugués donnant pour les points de la courbe M une relation de la forme

$$\mu\rho + \mu'\rho' = \text{Constante}$$

Par suite, il en sera de même de tout autre couple de points pris d'une façon quelconque sur la courbe focale.

Si donc on convient d'étendre la dénomination d'ovales à toutes les courbes dont les distances à deux points fixes de l'espace satisfont à une relation de la forme (α) on pourra énoncer ce théorème.

Tout ovale a une infinité de foyers situés sur une courbe plane du troisième ordre dont le plan, perpendiculaire à celui de l'ovale est pour cet ovale un plan de symétrie (Darboux)

Appelons pour simplifier foyers principaux les foyers situés dans le plan de l'ovale. Si deux de ces foyers sont réels, le troisième le sera également et le théorème de Chasles se trouve ainsi démontré.

Dans le cas général, un des trois foyers principaux est toujours réel. Soit f_1 ce foyer. on pourra supposer que le point q coïncide avec lui. alors l'équation de la courbe focale sera de la forme.

$$z^2 = \frac{x\left[2Ax^2 + (B^2 - 4AC - 1)x + 2C\right]}{1 - 2Ax} \qquad (\varphi')$$

Si l'un des foyers principaux s'éloigne à l'infini, A devant être nul, m^2 qui est égal à $1 - 2Ax$ sera l'unité, c'est-à-dire que l'ovale sera une conique[1].

Si deux foyers principaux coïncident, on peut toujours supposer que f_1 est l'un d'entre eux : alors C sera nul, et la valeur de ρ relative au troisième foyer f_3 sera égale d'après : $\frac{x^2 - \rho^2}{2x} = C$ à $f_1 f_3$: c'est précisément la condition à laquelle satisfait l'ovale obtenu comme caustique secondaire du cercle dans le cas de la réflexion, c'est-à-dire le Limaçon de Pascal.[2]

Enfin les trois foyers principaux coïncideront si l'on a simultanément $C = 0$ $B^2 = 1$: le limaçon de Pascal sera alors une Cardioïde et l'on aura une Cissoïde pour courbe focale.

Le point q coïncidant avec le foyer principal f_1 l'équation trouvée pour l'ovale devient une équation en coordonnées polaires ordinaires. elle peut s'écrire :

$$\cos\theta = A\rho + B + C\frac{1}{\rho} \qquad (\delta)$$

Sous cette forme, on reconnaît immédiatement que l'ovale est sa propre transformée par rayons vecteurs réciproques lorsqu'on prend pour pôle de transformation un de ses foyers principaux (Quételet)[3]. L'ovale appartient donc à l'importante famille des anallagmatiques sur lesquelles nous aurons à revenir à propos des surfaces de même nom (Moutard, Laguerre)

Convenons d'appeler distance d'un point à une sphère, la moyenne géométrique des normales abaissées du point sur la sphère, c. a. d. la longueur de la tangente. Nous reconnaîtrons par une extension très simple du raisonnement qui a été fait plus haut que tout ovale admet une infinité de sphères focales, c. a. d. telles que les distances t, t' de chaque point de la courbe à deux sphères associées satisfont à une

---

(1) Dans ce cas, les propriétés du troisième foyer se traduisent par celles des Directrices

(2) Si $C = 0$ $B = \sqrt{2}$ la courbe focale est une strophoïde droite.

(3) Cette propriété appartient à toutes les courbes rentrant dans l'équation :

$$\rho^m + F(\theta) + \frac{\alpha}{\rho^m} = 0$$

quels que soient $F(\theta)$ et m. Les courbes qui peuvent être considérées comme dérivant du cercle. $\rho^2 + (2\sqrt{\alpha} - \cos^2\theta) + \frac{\alpha}{\rho^2} = 0$.. par une espèce de déformation ont été récemment étudiées (Mannheim)

relation de la forme $\mu t + \mu' t' = \text{Constante}$.

Les centres de toutes ces sphères sont contenus dans le plan de la courbe focale dont les points doivent être considérés comme des sphères focales de rayon nul.

Il est d'ailleurs évident que les sphères focales qui ont leurs centres sur une même perpendiculaire au plan de l'ovale coupent ce plan suivant un même cercle réel ou imaginaire et donnent une relation identique quand on les associe à la même sphère focale ou au même foyer.

Il suffira donc pour connaître ce système de sphères, d'étudier la série des cercles focaux situés dans le plan de l'ovale.

L'équation de la courbe focale étant

$$z^2 = \varphi(x)$$

il est facile de voir que les cercles focaux ont pour diamètres les ordonnées de la courbe

$$y^2 = -\varphi(x) \quad (1)$$

En outre ils ont pour enveloppe l'ovale à laquelle ils sont

---

(1) Si l'on appelle u_0 le rayon du cercle focal réel ou imaginaire correspondant à la sphère qui remplace le point focal φ dans les calculs de la page 98, on trouve pour l'équation de l'ovale :

$$\xi = At^2 + Bt + C \qquad (\Delta)$$

avec :

$$A = \frac{1-m^2}{2x}$$
$$B = \frac{pm}{x} \qquad (E)$$
$$C = \frac{x^2 - p^2 + u_0^2 - u^2}{2x}$$

l'équation de la courbe focale est alors :

$$z^2 = -u_0^2 - x^2 + 2Cx + \frac{B^2x^2}{1-2Ax} \quad (\Phi)$$

et celle de la courbe dont les ordonnées sont les diamètres des cercles focaux :

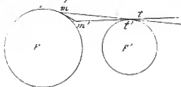
$$u^2 = -z^2 = u_0^2 + x^2 - 2Cx - \frac{B^2x^2}{1-2Ax} \quad (\Psi)$$

Ces nouvelles expressions ont l'avantage d'être indépendantes de l'existence des points focaux. Mais d'après la forme même de la fonction Φ, il est facile de reconnaître que ces points existent toujours, sauf le cas où : $A = 0$ qui est celui des coniques.

Dans ce dernier cas, en prenant l'origine au centre de la conique, on remarque d'abord que par raison de symétrie C doit être nul en identifiant ensuite la relation

$$\xi = Bt$$

par raison de symétrie doublement tangents(1)

En effet, soit m un point de l'ovale et F un cercle focal passant en ce point. associons au cercle F un autre cercle focal F' : le déplacement du point m à partir de sa position sur F est déterminé par la relation :

$$\mu dt + \mu' dt' = 0$$

qui exige que le rapport des accroissements de t et t' soit fini, et cette condition ne peut être satisfaite que si m se déplace sur la tangente au cercle focal sur lequel il se trouve.

On reconnaîtra aisément, d'après ce qui précède, que la surface engendrée par la révolution d'un ovale autour d'un axe situé dans son plan de symétrie n'admet pour sections planes que des ovales.

En effet, si F et F' sont, sur l'axe de rotation, deux sphères

---

avec l'équation : $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

on trouve : $B^2 = \frac{a^2}{a^2-b^2}$ .. $u_0^2 = b^2$ ..... et les équations φ. ψ deviennent.

$$\frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \qquad (\varphi')$$

$$\frac{x^2}{a^2-b^2} + \frac{u^2}{b^2} = 1 \qquad (\psi')$$

En faisant diverses hypothèses sur les signes et les grandeurs de a et de b, on reconnaîtra :

que la courbe ψ' est toujours réelle, c'est-à-dire que toute conique admet deux systèmes de cercles focaux correspondant à ses deux axes ;

que la courbe focale est imaginaire si, b^2 étant positif, a^2 est négatif ou positif et inférieur à b^2. Ces deux cas correspondent au petit axe de l'ellipse ou à l'axe non transverse de l'hyperbole.

Ainsi, en résumé, les ovales qu'on pourrait définir au moyen de deux sphères focales ne différeraient pas des ovales déjà obtenus par la considération des foyers.

(1) Cette condition d'avoir avec l'ovale un double contact réel ou imaginaire peut servir de définition aux cercles focaux et aux foyers. C'est cette définition qui a permis de généraliser la notion de foyer et de l'appliquer aux courbes quelconques. nous reviendrons dans la note suivante sur ce sujet.

Cours de Géométrie descriptive de M. Haag (Appendice) Livraison 26.

focales de la courbe donnée, les distances de tous les points de la surface à ces deux sphères seront liées par une relation de la forme :

$$\mu\rho + \mu'\rho' = \text{Constante}$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

L'équation :

$$\cos\theta = A\rho + B + C\frac{1}{\rho}$$

qui ne diffère que par le terme constant B de celle d'un cercle, fait voir que l'ovale passe par les deux points circulaires situés à l'infini.

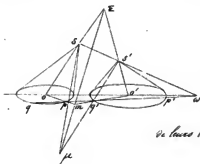
Ces points sont pour la courbe des points de rebroussement imaginaires (Cayley).

Citons pour terminer, une construction géométrique très simple des ovales.

Soient deux cercles o, o' et un point ω pris sur la ligne qui joint leurs centres. Par ce point, menons une transversale quelconque T, joignons o à l'un des points où cette transversale coupe le premier cercle et faisons de même pour o' et le second cercle, nous obtenons ainsi deux droites qui se coupent en m et le lieu du point m est un ovale dont o et o' sont deux foyers.

Car le théorème des transversales appliqué au triangle $oo'm$ montre immédiatement que le rapport de mp à mq' est constant (1).

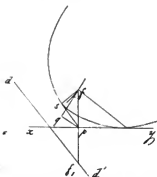
Si le point ω est sur l'un des cercles, l'ovale est un limaçon dont le centre de ce cercle est le foyer double, si le point ω est un centre de similitude des deux cercles, l'ovale est une section conique.

---

(1) Cette construction graphique est précisément celle qu'on aurait à effectuer pour trouver la trace horizontale d'un cône Σ passant par l'intersection de deux autres cônes à bases circulaires et tels que les lignes joignant leurs sommets S, S' aux centres de leurs bases viennent concourir au sommet du cône Σ.

Nous retrouverons fréquemment les ovales de Descartes dans la suite de ces leçons : ces courbes se représenteront notamment à propos du tore et de la cyclide et dans l'étude des courbes gauches obtenues par l'intersection d'une sphère avec une surface du second degré.

e. Chaînette.

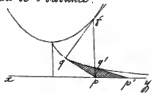
La chaînette peut être géométriquement définie comme lieu du foyer d'une parabole qui roule sur une droite (1).

La chaînette a un sommet qui correspond à la position où l'axe de la parabole est perpendiculaire à la droite sur laquelle elle roule.

Les propriétés principales de la chaînette se déduisent aisément de la définition précédente.

1°. La perpendiculaire abaissée du pied de l'ordonnée sur la tangente a une longueur constante.

En effet, soit pq cette perpendiculaire, et s le sommet de la parabole ; sp est la tangente au sommet, et les triangles rectangles égaux sfp, pqf, donnent :

$$pq = sf = p \quad (2)$$

2°. L'arc de chaînette mesuré à partir du sommet de la courbe est égal à la longueur de la tangente comprise entre son point de contact f et la projection q du pied de l'ordonnée.

Cette proposition résulte immédiatement de deux remarques qui seront faites plus loin (Note 8) sur la rectification des roulettes en général.

---

(1) C'est aussi l'enveloppe de la directrice de cette même parabole : car il est aisé de voir que les points successifs de cette enveloppe sont les symétriques par rapport à xy des positions correspondantes du foyer.

(2) Il est facile de retrouver l'équation de la chaînette en partant de cette propriété : le triangle fpq donne : $p\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - p^2}$

d'où en intégrant : $y = \frac{p}{2}\left(e^{\frac{x}{p}} + e^{-\frac{x}{p}}\right)$

3° Le point q décrit une développée de la chaînette et cette développée jouit de cette propriété remarquable que sa tangente (comptée jusqu'à la droite xy) a une longueur constante p : c'est une tractrice[1].

4°. Courbure et diamètre de la chaînette. Les centres principaux o_2 et o_3 sont faciles à construire. Ce sont (page 68) les centres de courbure du premier et du second ordre de la parabole. Le premier s'obtient en prenant l'intersection t de la normale à la parabole avec la tangente à la chaînette et prolongeant $o_1 t$ de sa propre longueur au delà de t ; le

second en menant par o_2 la parallèle à xy, prenant son intersection e avec $o_1 f$ et prolongeant $o_2 e$ du double de sa longueur.

Connaissant les centres $o_1 o_2 o_3$, on applique les constructions générales de la page 62, et l'on arrive aux résultats suivants :

Le centre de courbure du premier ordre q_1 est le symétrique de o_1 par rapport à la tangente à la courbe : en d'autres termes.

Le rayon de courbure de la chaînette est égal à la normale.

Le centre de courbure du second ordre q_2 est le symétrique de o_2 par rapport à la normale à la courbe.[2]

Prolongeons pq de sa demi longueur au delà de p ; joignons le point f au point d ainsi obtenu : nous aurons le diamètre de la chaînette en f[3].

Cette dernière construction fournit un moyen simple et direct pour

---

(1) Il est presque évident d'après la propriété de la tractrice que l'aire mixtiligne $pqp'q'$ comprise entre xy, la courbe et deux tangentes, est égale au secteur que dans le cercle de rayon pq correspond à l'angle des deux tangentes.

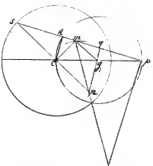
(2) Cette dernière propriété résulte plus immédiatement encore de l'application du théorème I^{er} sur les sous-normales à la normale à la chaînette sur laquelle les points $o_1 f$ et q_1 déterminent deux segments constamment égaux entre eux.

(3) On obtient aussi le diamètre en menant le point de la chaînette

déterminer le centre de la Conique osculatrice. En effet, faisons rouler la tangente fg sur la chaînette, elle entraînera avec elle le point g qui décrira la tractrice, le point p qui décrira la droite xy, et enfin le point d qui suivra une certaine trajectoire dont df sera à chaque instant la normale. Mais df sera aussi à chaque instant le diamètre de la chaînette au point f où il la rencontre. L'enveloppe du diamètre et la développée de la trajectoire d sont donc une même courbe dont les points s'obtiendront en appliquant au point d dans le roulement de la tangente la construction de Savary.

f. Courbe d'ombre de la vis à filet triangulaire.

Cette courbe, d'après la définition géométrique qui en est donnée dans l'étude des hélicoïdes est le lieu du point d'intersection m d'une droite pm mobile autour d'un point fixe avec l'un des côtés d'un angle droit pivotant autour du centre d'un cercle tandis que le second côté rencontre pm sur ce cercle.

Construction de la tangente. Abaissons du centre c la perpendiculaire cK sur pm. On a

$sK \cdot sm = \overline{cs}^2 =$ Constante

Mais les normales aux lieux des points s et K sont connues, le théorème II sur les sous-normales donne donc immédiatement la normale à la courbe d'ombre.

On est conduit à la construction suivante.

Par m menons la perpendiculaire à cm et par le point g où cette droite rencontre cp la perpendiculaire à

---

au symétrique de o_2 par rapport à xy.

Cours de Géométrie descriptive de M. Haag (appendice) Livraison 27.

pm. L'intersection de cette dernière avec cs est un point de la normale (1)

Selon que le point p est intérieur ou extérieur au cercle, la courbe affecte l'une des formes qu'indiquent les deux premières figures.

(fig. 1)

(fig. 2)

Si le point p s'éloigne à l'infini, on a la courbe de la figure 3.

(fig. 3)

(fig. 4)

Enfin dans le cas où le point p est situé sur le cercle, (fig. 4) la courbe d'ombre devient une strophoïde droite dont c est le sommet et p le point double (car il est facile de reconnaître que le triangle mpq formé par pm, cm prolongé et la tangente au cercle en p est isocèle). On constate d'ailleurs sans difficulté que la construction générale de la tangente à la courbe

---

(1) Car : $\frac{s'm'}{nq} = \frac{pq}{mq} = \frac{pK}{sK}$. d'où : $\frac{s'm'}{pK} = \frac{nq}{sK}$

d'ailleurs : $\frac{s'K'}{pK} = \frac{ml}{sm} = \frac{nq}{sm}$

donc : $\frac{s'K'}{s'm'} = \frac{sK}{sm}$.

d'ombre est identique dans le cas actuel avec celle donnée à la note 5 pour la strophoïde.

Autrement. Supposons qu'à partir de la position actuelle du rayon mobile pm, on remplace dans la génération de la courbe le cercle par sa tangente en s. On aura en continuant la construction pour cette tangente, un nouveau lieu tangent au précédent en m puisqu'il aura avec lui deux points consécutifs communs. Mais les faisceaux pm et cm étant homographiques, ce nouveau lieu est une conique, et il est facile de reconnaître que cette conique qui passe en m, en c et en p passe aussi par le pied q de la perpendiculaire

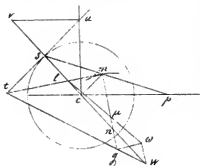
abaissée de p sur le diamètre cs, et a pour tangente en c la perpendiculaire cy à cp : les deux cordes cm, pq étant parallèles, la droite si qui joint leurs milieux est le diamètre conjugué de leur direction et c'est sur ce diamètre que doivent se couper les tangentes à la conique en c et en m, c'est-à-dire la droite cy et la tangente en m à la courbe d'ombre.

De là cette construction : mener par le point h où pm coupe cy la parallèle à cm jusqu'à sa rencontre en l avec cs : ml est la tangente à la courbe d'ombre en m (Mannheim).

Remarque. Si l'on prolonge la tangente st jusqu'à ses intersections en u et en t avec cy et avec ml, la figure montre immédiatement que le point s est le milieu de tu.[1]

---

(1) Cette remarque détermine la position des asymptotes par celle correspondante du point t : ces asymptotes sont les tangentes menées du point p au cercle : le cas où p est sur le cercle fait exception : mais alors le point q étant au milieu de mm' (fig. 4) l'asymptote est symétrique par rapport à p de la tangente en c : il y a là un exemple de discontinuité assez remarquable.

Construction du centre de courbure. La remarque que nous venons de faire permet de trouver la normale au lieu des points t. En effet, les segments su, st étant constamment égaux et le point s étant le point de contact de la droite tu avec le cercle qu'elle enveloppe, d'après le théorème I sur les sous-normales, la perpendiculaire uv à cy et la normale tw à la courbe t doivent rencontrer le diamètre os en deux points v et w symétriques par rapport au centre.

D'ailleurs les droites st cm restant constamment parallèles, les déplacements simultanés de m et de t sont en projection sur la direction perpendiculaire cs comme cm est à st, si donc on prolonge la normale à la courbe d'ombre jusqu'à sa rencontre en n avec cs, les longueurs mn et tw pouvant être considérées comme des quantités proportionnelles aux vitesses des points m et t qu'on aurait portés sur les normales à leurs trajectoires.

Mais les deux points m et t sont constamment situés sur la tangente à la courbe d'ombre, on saura donc construire (d'après ce que a été vu, page 76) le point où toute droite passant par m et faisant avec mt un angle constant touche son enveloppe. Appliquant cette construction à la normale, on obtiendra le centre de courbure.

Il est facile de reconnaître que la construction à laquelle on est ainsi conduit revient à prendre sur mn un point μ tel que :

$$\frac{m\mu}{mn} = \frac{tg}{tw}$$

g étant l'intersection de tw avec mn.

Si donc on mène par g une parallèle à la tangente, par w une parallèle à la normale, ces droites se coupent en ω, et l'on rencontre en μ la normale à la courbe d'ombre.

Note 7.

Sur les séries et les réseaux de courbes planes

—

Généralités. Si dans la définition géométrique d'une courbe, il entre un paramètre variable et qu'on attribue à ce paramètre une série de valeurs, on aura une série de courbes.

Si le paramètre variable entre au premier degré dans l'équation de la courbe [1], il passera par tout point du plan une courbe de la série et une seule. La série sera simple. Elle sera multiple dans le cas contraire et son degré de multiplicité représentant le nombre de courbes réelles ou imaginaires qui passent par un point donné du plan sera égal au degré de l'équation de la courbe ordonnée par rapport au paramètre variable. Les points du plan se distingueront alors suivant le nombre de racines réelles que donnera l'équation précédente où l'on remplace les coordonnées variables de la courbe par celles du point. Et l'on sera amené à décomposer le plan en zones telles que pour tous les points d'une même zone, le nombre de racines réelles sera le même : les courbes de séparation de ces zones seront les lieux des points donnant des racines doubles ou multiples : ce seront les enveloppes des courbes de la série.

Revenons au cas de la série simple et soit α le paramètre variable. Comme il passe par chaque point du plan une courbe et une seule, il en résulte qu'à chaque point du plan correspond une valeur et une seule du paramètre. On peut donc en adoptant une dénomination proposée par Lamé considérer ce paramètre comme une fonction de point et les courbes de la série seront le lieu des points pour lesquels la fonction de point est constante : ces courbes pourront donc servir à la représentation de la fonction. Mais comme elles représentent également toute fonction rationnelle de α, il

---

[1] Équation rapportée à un système de coordonnées quelconques d'ailleurs, mais supposée algébrique et rationnelle.

vement de dégager l'étude géométrique de la série de courbes de l'étude algébrique de la fonction à laquelle elle n'est pas nécessairement liée.

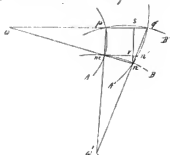
Système de réseaux correspondant à une série.

Étant donnée une série simple $A\,A'\,A''$, on peut toujours supposer qu'à partir d'un point pris sur l'une des courbes qui la composent un mobile m se déplace en coupant constamment les courbes de la série qu'il rencontre sous un angle donné θ : on obtient ainsi une certaine trajectoire et en changeant le point de départ du point m une seconde série C, simple comme la première; ces deux séries forment un réseau qui peut être dit isogonal puisque l'angle sous lequel les courbes se coupent est le même en tout point du plan.

Toutes les séries obtenues en faisant varier θ forment deux à deux des réseaux isogonaux, ces réseaux sont orthogonaux quand les courbes des deux séries se coupent à angle droit.

On conçoit que l'étude de ces différents réseaux doit se faire en même temps que celle de la série proposée.

Relations entre les courbures des courbes d'un réseau.

Considérons le quadrilatère infinitésimal $m\,n\,p\,q$ formé par deux couples de courbes orthogonales infiniment voisins, et soient ω, ω' les points de concours des côtés opposés;

il est facile de reconnaître que ces points sont à la limite les centres de courbure de A et B, car si l'on suppose, par exemple que, B et B' restant fixes, A' se rapproche indéfiniment de A, mn et pq deviennent les normales à la courbe A en m et en p, c'est-à-dire en deux points consécutifs.

Menons par m une parallèle à pq et par n une parallèle à pm : ces droites se coupent en v et les triangles semblables $\omega p m$, $m v n$ donneront :

$$\frac{mn}{\omega m} = \frac{nv}{mp}$$

mais nv qui est la différence entre ns et mp peut être pris également

pour la différence entre mp et nq (1), et l'on a conséquemment :

$$\frac{mn}{\omega m} = \frac{\frac{\delta mp}{mn} mn}{mp} \quad (2)$$

c'est-à-dire en remplaçant mn et mp par les arcs ds et ds' dont ils ne diffèrent que de quantités négligeables et substituant à ωm sa limite :

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{r} = \frac{\frac{\delta . ds}{ds'} ds'}{ds . ds'}$$

d'où cet énoncé : le rayon de courbure de l'une des courbes orthogonales qui se croisent en m est égal à la différence entre les côtés du rectangle infinitésimal qui sont parallèles à cette courbe, divisée par l'aire du rectangle.

Théorème de Lamé

Considérons actuellement le faisceau formé par les tangentes aux courbes isogonales en m. L'angle α que fait ce faisceau avec une position initiale quelconque est une fonction de point qui n'admet en chaque point du plan qu'une seule valeur. La somme des variations de cette fonction sera donc nulle toutes les fois qu'on parcourra un contour fermé quelconque.

---

(1) Car le triangle nsq donne : $\quad nq - ns = \omega' \times nq \times \cot . q$
et si q tend vers $\frac{\pi}{2}$, cette différence est négligeable à côté des termes que l'on conserve.

Il n'en serait plus de même si les deux courbes considérées au lieu d'être orthogonales faisaient entre elles un angle θ : en observant alors que la limite de ω n'est plus le centre de courbure de A, mais sa projection sur l'oblique ωm et en tenant compte de la différence entre nq et ns, on serait conduit à la relation :

$$(\alpha') \quad \frac{1}{r \sin . \theta} + \frac{1}{r' \operatorname{tg} . \theta} = \frac{\frac{\delta . ds}{ds'} ds'}{ds . ds'}$$

qui, combinée avec la relation conjuguée :

$$(\alpha'') \quad \frac{1}{r \operatorname{tg} . \theta} + \frac{1}{r' \sin . \theta} = \frac{\frac{\delta . ds'}{ds} ds}{ds . ds'}$$

donnerait :

$$(\alpha''') \quad \frac{\sin . \theta}{r} = \frac{\frac{\delta . ds}{ds'} ds'}{ds\, ds'} - \cos . \theta \frac{\frac{\delta . ds}{ds} ds}{ds . ds'}$$

(2) Afin de ne laisser aucune incertitude sur le sens précis des notations employées il est nécessaire d'insister sur la signification du symbole $\frac{\delta mp}{mn} mn$. En général u étant une fonction de point telle que $\varphi(xy)$ a un déplacement défini correspond un accroissement de u qui sera :

$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy$$

et c'est cet accroissement que nous représenterons pour abréger par :

$$\frac{\delta u}{ds} ds$$

ds étant la longueur du déplacement : il est d'ailleurs facile de s'assurer que dans ce mode de notations comme pour les différentielles ordinaires :

$$\frac{\delta uv}{ds} ds = u \frac{\delta v}{ds} ds + v \frac{\delta u}{ds} ds$$

Appliquons cette remarque au contour $mnpq$ et désignons par e e' les angles de contingence relatifs aux arcs mp, mn. Nous arriverons quelle que soit la disposition de la figure à la relation

$$\frac{\delta e}{ds'}\,ds' + \frac{\delta e'}{ds}\,ds = 0$$

c'est-à-dire en remarquant que $e = \frac{ds}{\tau}$ $e' = \frac{ds'}{\tau'}$.

$$\frac{\delta \frac{1}{\tau}}{ds'} + \frac{\delta \frac{1}{\tau'}}{ds} + \frac{1}{\tau}\,\frac{\frac{\delta ds}{ds'}\,ds'}{ds\,ds'} + \frac{1}{\tau'}\,\frac{\frac{\delta ds'}{ds}\,ds}{ds\,ds'} = 0$$

ou à cause du théorème précédent :

$$(b) \qquad \frac{\delta \frac{1}{\tau}}{ds'} + \frac{\delta \frac{1}{\tau'}}{ds} + \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\tau'^2} = 0 .$$

Telle est la relation découverte par Lamé et dont nous retrouverons plus loin l'extension aux courbes orthogonales tracées sur une surface [1]

Relation entre les courbures de toutes les courbes isogonales qui passent en un point m.

Soit maintenant ρ le rayon de courbure d'une courbe isogonale C faisant avec la courbe B du réseau un angle θ et soit q le point où cette courbe rencontre la courbe A'. En appelant e, e' les angles de contingence des arcs mn, nq et ε celui de l'arc mq, on a évidemment :

$$\varepsilon = e + e'$$

puisque ces angles ne sont que les variations de la fonction de point α considérée plus haut. Si donc on désigne par ρ le rayon de courbure de la courbe C en m et par τ, τ' comme précédemment les rayons de courbure des courbes A' et B, on aura :

$$\frac{mq}{\rho} = \frac{nq}{\tau} + \frac{mn}{\tau'}$$

et comme le triangle mnq est à la limite rectangle en n :

$$(c) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos\theta}{\tau} + \frac{\sin\theta}{\tau'}$$

Ainsi les centres de courbure de toutes les courbes isogonales qui passent en un point m sont situés sur une même droite.

Il en résulte qu'en chaque point du réseau il existe une courbe ayant une inflexion en ce point, et que la courbe qui lui est orthogonale est celle dont la courbure est la plus grande.

Le mode même de démonstration qui nous a conduit aux résultats

---

[1] Si les courbes considérées au lieu d'être orthogonales faisaient entre elles un angle θ, en substituant à $\frac{\delta ds}{ds'}\,ds'$ et $\frac{\delta ds'}{ds}\,ds$ les valeurs indiquées vers la [illegible] de la page précédente, on aurait trouvé :

$$\frac{\delta \frac{1}{\tau}}{ds'} + \frac{\delta \frac{1}{\tau'}}{ds} + \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{2\cos\theta}{\tau\tau'} + \frac{1}{\tau'^2}\right) = 0$$

précédents montre suffisamment quelle serait la marche à suivre pour arriver à des relations plus complexes liant entre eux les éléments caractéristiques d'ordre supérieur tels que la déviation et les variations de ces éléments [1]

Théorème de Kummer

Nous nous bornerons, pour terminer ces généralités à mentionner le théorème suivant relatif aux foyers.

Lorsque deux séries simples de courbes algébriques sont orthogonales entre elles, les courbes qui les composent sont toutes homofocales (Kummer)

Nous retrouverons ce théorème généralisé dans l'étude des surfaces.

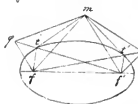
Exemples de réseaux orthogonaux.

1° Courbes homofocales du second degré.

1° Courbes homofocales ou biconfocales du second degré.

Considérons toutes les ellipses et toutes les hyperboles ayant mêmes foyers $f f'$. ces courbes forment deux séries simples et qui sont orthogonales puisque les tangentes respectives aux deux courbes qui se croisent en un point sont les bissectrices de l'angle fmf'. [2]

L'étude géométrique du réseau ainsi obtenu est fort importante. Nous démontrerons ses principales propriétés en rappelant d'abord quelques théorèmes élémentaires sur les sections coniques.

I. Les tangentes menées d'un point extérieur à une section conique sont également inclinées sur les rayons vecteurs allant de ce point aux foyers.

Résulte immédiatement de la considération des triangles qmf', fmq' qui sont égaux comme ayant leurs trois côtés respectivement égaux.

La même figure fait voir que l'angle mft est égal à l'angle $mf't'$

Ainsi

II. La droite qui joint un foyer au sommet d'un angle circonscrit à l'ellipse, est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs qui vont de ce foyer aux points de contact.

---

[1] Ainsi on trouverait entre les déviations des différentes courbes orthogonales qui passent par un point de la relation

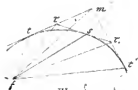
$$(d) \quad \frac{tg\,\delta}{\rho^2} = \cos^2\theta\,\frac{tg\,\alpha}{r^2} + \sin^2\theta\,\frac{tg\,\alpha'}{r'^2} - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}\right)\frac{\sin\theta\cos\theta}{3}$$

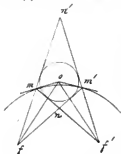
où $tg\,\delta$ représente la déviation de la courbe C, $tg\,\alpha$ et $tg\,\alpha'$ celles des courbes A et B.

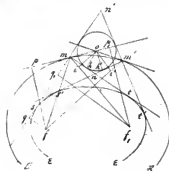
[2] Si deux coniques ont deux cercles focaux communs, les normales à ces coniques en leurs points d'intersection forment avec les rayons vecteurs qui vont aux centres des cercles focaux un faisceau harmonique.

Si $\tau\tau'$ est une tangente mobile à la conique :

$$\tau f \tau' = \frac{1}{2} t f s + \frac{1}{2} t' f s = \frac{1}{2} t f t'$$

c'est-à-dire que

III. La portion d'une tangente mobile comprise entre deux tangentes fixes est vue d'un foyer sous un angle constant.

Soient $m\,m'$ deux points pris sur la conique. Joignons-les aux foyers. menons les tangentes en m et m', et soit o le point de concours de ces tangentes qui sont les bissectrices des angles fmf', $fm'f'$. D'après ce qui précède, of, of' seront les bissectrices des angles mfm', $mf'm'$, c'est-à-dire que le point o sera équidistant des quatre côtés du quadrilatère $n\,m\,n'\,m'$. Donc :

IV. Le quadrilatère formé par les quatre rayons vecteurs qui vont des foyers d'une conique à deux points m et m' pris sur la courbe est circonscriptible au cercle.

Soient enfin deux coniques homofocales, deux ellipses par exemple. par deux points m et m' pris sur l'ellipse extérieure E menons les tangentes à l'ellipse intérieure ε. Menons aussi les tangentes à la conique extérieure en m et m' et soit o le point de concours de ces dernières. Abaissons de o les perpendiculaires oh et oh', oi et oi' sur mt $m's'$, mf_1 $m'f$, nous aurons :

$$\frac{oh}{oi} = \frac{\sin omh}{\sin omi} \qquad \frac{oh'}{oi'} = \frac{\sin om'h'}{\sin om'i'}$$

or d'après le théorème précédent :

$$oi = oi'$$

donc

$$\frac{oh}{oh'} = \frac{\sin omh}{\sin omi} \times \frac{\sin om'i'}{\sin om'h'}$$

mais si l'on abaisse du foyer f_1 les perpendiculaires f_1p_1, f_1q_1 sur ma, ms, on a :

$$f_1p_1 = f_1m \cdot \sin omi$$

$$f_1q_1 = f_1m \sin(\pi - omi - omh) = f_1m \sin(omi + omh)$$

d'où

$$\frac{f_1q_1}{f_1p_1} = \frac{\sin(omi + omh)}{\sin omi}$$

l'autre foyer donnera de même :

$$\frac{fq}{fp} = \frac{\sin(omi - omh)}{\sin omi}$$

multipliant membre à membre et remarquant que les produits $fp \times f_1 p_1$, $fq \times f_1 q_1$ sont respectivement égaux aux carrés des demi axes B et b des deux ellipses, il vient :

$$\frac{b^2}{B^2} = \frac{\sin(omi + omh)\sin(omi - omh)}{\sin^2 omi}$$

$$= \frac{\sin^2 omi - \sin^2 omh}{\sin^2 omi}$$

d'où enfin $\qquad \dfrac{\sin^2 omh}{\sin^2 omi} = 1 - \dfrac{b^2}{B^2}$

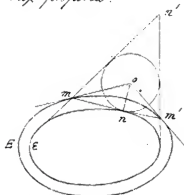
on aurait de même : $\qquad \dfrac{\sin^2 om'h'}{\sin^2 om'i'} = 1 - \dfrac{b^2}{B^2}$

on en conclut : $\qquad \dfrac{oh}{oh'} = 1$

c'est-à-dire que le point o est équidistant des tangentes mt $m's'$. Mais étant situé à l'intersection des tangentes en m et m' à la conique E, ce point est déjà équidistant des tangentes ms et mt, $m's'$ et $m't'$. Donc enfin ces quatre tangentes touchent un même cercle de centre o et l'on a ce théorème qui est l'extension du précédent.

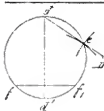
V. Les quatre tangentes menées de deux points d'une conique à une conique homofocale forment un quadrilatère circonscriptible au cercle.

La réciproque de ce théorème se démontre sans difficulté.

On en conclut que le quadrilatère complet formé par les quatre tangentes a ses sommets opposés situés deux à deux sur des coniques homofocales aux proposées.

Supposons que les deux côtés mn, $m'n$ viennent à coïncider : le quadrilatère se réduit à un triangle. Le cercle inscrit touche mm' en n, et l'on a ce théorème qui est un corollaire du précédent.

Étant menée la tangente en un point n d'une conique ε, le pôle de cette droite relativement à une conique homofocale à la première, est situé sur la normale en n à la conique ε.

Mais une droite quelconque D est toujours tangente en l'un de ses points à une conique du réseau (1) ; à l'énoncé précédent, on

---

(1) Le cercle passant par les deux foyers du réseau et par le point d'intersection d de la droite avec la perpendiculaire au milieu de ff_1 coupe précisément cette droite au point unique et toujours réel où elle touche l'une des coniques du réseau.

peut donc substituer celui-ci.

VI. Le lieu des pôles d'une droite dans un réseau de coniques homofocales est une seconde droite perpendiculaire à la première au point où celle-ci est touchée par celle des coniques du réseau à laquelle elle est tangente (1).

On voit d'après ce théorème qu'il existe en chaque point du plan deux droites rectangulaires qui sont conjuguées par rapport à toutes les coniques du réseau. Ce sont les tangentes respectives aux deux coniques qui passent en ce point ce sont aussi les axes de la conique indicatrice dont il a été question page 10, et l'on voit par conséquent que les courbes du réseau peuvent être considérées comme les lignes de courbure d'une surface du second degré infiniment aplatie dont l'une des coniques du réseau, E, serait une section principale tandis que l'axe conjugué de cette section tendrait vers 0. D'après une remarque faite ailleurs (page 40) ces coniques indicatrices sont des homologiques de celles du réseau relativement à leurs centres. Leurs asymptotes sont les tangentes menées par leur centre à E.

Si l'on considère en particulier l'un des foyers, les deux coniques infiniment aplaties qui passent en ce point fourniront une infinité de couples de tangentes rectangulaires qui seront conjuguées relativement à toutes les courbes du réseau: on retrouve ainsi une propriété connue des foyers.

D'ailleurs la conique homologique qui a son centre au foyer est un cercle: les asymptotes imaginaires du cercle sont donc les tangentes menées de ce foyer à toutes les coniques du réseau, ou, en d'autres termes,

VII. Toutes les coniques homofocales peuvent être considérées comme inscrites dans un

---

(1) La démonstration de ce théorème peut sembler incomplète, puisque nous n'avons considéré que le cas de deux ellipses E et E'. Mais d'abord le raisonnement s'étend immédiatement au cas de deux hyperboles et le théorème VI se trouve ainsi rigoureusement démontré toutes les fois que les pôles sont pris dans les coniques de même espèce que celle touchée par la droite D. Si les pôles sont pris dans les coniques d'espèce contraire, dans les ellipses par exemple, tandis que la droite D touche en c une hyperbole, la normale Δ à cette hyperbole en c touchera en ce point une ellipse, ses pôles relatifs aux ellipses seront donc situés sur la droite D, et à cause de la réciprocité entre pôles et polaires, les pôles de D relatifs à ces mêmes ellipses appartiendront à Δ

même parallélogramme imaginaire dont les deux foyers sont deux sommets réels et qui a pour ses quatre autres sommets les foyers imaginaires de ces mêmes coniques et les deux points circulaires situés à l'infini.

Ce théorème établit un rapprochement important entre les propriétés des coniques homofocales et celles plus générales appartenant à un système de coniques inscrites dans un quadrilatère (1) : il rattache directement l'étude du réseau homofocal à la définition générale des foyers (page 16) et pourrait servir de point de départ à cette étude si la notion sur laquelle il repose ne s'écartait pas des conceptions purement géométriques.

Les théorèmes qui précèdent fournissent la démonstration d'une double proposition que nous avions énoncée à la fin de la note 5 et qui consiste en ce que :

Un polygone à périmètre maximum inscrit dans une ellipse a ses côtés tangents à une ellipse homofocale et réciproquement.

Un polygone à périmètre minimum circonscrit à une ellipse a ses sommets situés sur une ellipse homofocale et réciproquement.

On voit de plus que l'énoncé peut être généralisé dans le premier cas en supposant que les sommets du polygone soient astreints à être

---

(1) Un pareil système se compose, comme l'on sait, d'une série double de coniques.

Les tangentes aux deux coniques qui se croisent en un point forment un faisceau harmonique avec les droites qui joignent ce point à deux sommets opposés du quadrilatère.

Les tangentes menées d'un point à toutes les coniques du réseau forment deux faisceaux en involution.

Il y a toujours une conique du réseau et une seule touchant une droite donnée.

Les pôles d'une droite D dans les coniques du réseau sont situés sur une seconde droite Δ ; ces deux droites sont les tangentes aux coniques qui se croisent en leur point d'intersection :

Et par conséquent, en supposant la droite D à l'infini :

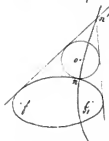
Les centres de toutes les coniques du réseau sont situés sur une même ligne droite (Chasles, Sections coniques, pages 205 et suivantes)

On voit comment les propriétés des coniques homofocales dérivent de ces théorèmes plus généraux

inscrits non pas sur une même ellipse, mais sur différentes ellipses homofocales.

D'après un théorème général dû à Poncelet, s'il existe un polygone fermé à la fois inscrit à une conique et circonscrit à une autre conique, tous ceux qu'on essaierait de décrire d'après cette condition se fermeraient d'eux-mêmes.

En appliquant ce théorème aux coniques homofocales, on voit qu'une conique admet toujours une infinité de polygones inscrits, de même nombre de côtés, à périmètre maximum, qui sont tous circonscrits à une même conique homofocale: et une infinité de polygones circonscrits de même nombre de côtés, à périmètre minimum, qui sont tous inscrits dans une même conique homofocale

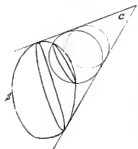
De plus tous les polygones inscrits et tous les polygones circonscrits sont isopérimètres, ainsi que nous l'avons déjà observé.

Remarquons enfin que le premier énoncé du théorème VI donne immédiatement la proposition suivante :

Le lieu des points de concours des tangentes communes à une conique et à une série de cercles touchant la conique en un point fixe est une seconde conique passant par le point fixe et homofocale à la première[1]

---

[1] Cette propriété des coniques se rattache au théorème suivant qu'elle peut servir à démontrer

Le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à une surface du second ordre est une conique passant par les ombilics de la surface et homofocale à la section principale qui renferme ces ombilics (Steiner)

Admettons en effet (ce qui sera démontré plus loin) que deux surfaces du second degré inscrites dans une troisième se coupent suivant deux lignes planes, et soit un cône de révolution circonscrit à la surface proposée S. Une sphère quelconque inscrite dans le cône coupera la surface S suivant

Nous aurons à revenir sur les coniques homofocales dans la note suivante à propos de la rectification des courbes du second degré.

2°. Ovales homofocaux.

Les ovales qui ont mêmes foyers principaux (réels ou imaginaires) forment un réseau orthogonal (Hart.)

Soient f f_1 et f_2 les trois foyers communs dont l'un f est toujours réel. L'équation des ovales en prenant ce foyer pour pole sera de la forme :

$$(a) \qquad \cos.\theta = A\rho + B + C\frac{1}{\rho}$$

avec les conditions

$$\frac{4AC+1-B^2}{2A} = ff_1 + ff_2 = m$$

$$\frac{C}{A} = ff_1 \times ff_2 = n$$

entre les trois coefficients A.B.C. Eliminant B et C entre ces trois équations, on arrive à la relation :

$$(b) \qquad A^2\left(\rho-\frac{n}{\rho}\right)^2 - 2\left[\left(\rho+\frac{n}{\rho}\right)\cos.\theta - m\right]A - \sin.\theta = 0$$

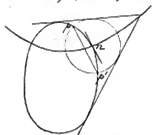
qui donne pour chaque point du plan deux valeurs de A correspondant à deux ovales. Mais si l'on appelle v l'angle sous lequel l'un de ces ovales coupe le rayon vecteur, cet angle est lié à A par la relation :

$$tg.v = \frac{\rho\, d\theta}{d\rho} = \frac{A\left(\frac{n}{\rho}-\rho\right)}{\sin.\theta}$$

et l'on voit d'après l'équation (b) que les deux valeurs de $tg.v$ correspondant

---

un cercle donc, en particulier, une sphère inscrite dans le cône et touchant la surface la touchera en l'un de ses ombilics. les sommets des cônes seront donc tous dans le plan principal des ombilics et dès lors le théorème de géométrie plane énoncé dans le texte donne immédiatement celui de Steiner.

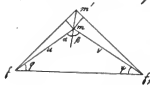
Mais ce dernier théorème fournit à son tour une extension du théorème de géométrie plane, car si l'on considère la série des sphères inscrites dans les cônes et passant par une section circulaire déterminée de la surface, on obtient dans le plan principal une série de cercles coupant la conique située dans ce plan suivant une corde fixe pp' parallèle à la tangente en n, et l'on voit que le théorème énoncé dans le texte pour les cercles qui touchent la conique en n s'étend à tous les cercles coupant la conique suivant des cordes parallèles à la tangente en n

Cette remarque fournit un nouvel exemple de la démonstration d'un théorème de Géométrie plane par la Géométrie à trois dimensions.

à celles de A auront leur produit égal à -1 ce qui démontre le théorème.

Il est à remarquer que les points désignés comme foyers de l'ovale étant, ainsi qu'on l'a vu, les centres de cercles de rayon nul doublement tangents à la courbe, ces points rentrent bien dans la définition générale des foyers (page 16).

Le théorème de Hart se rattache donc au théorème général de Kummer énoncé plus haut. (1)

3°. Cassinoïdes et hyperboles équilatères.

Les coordonnées bipolaires d'un point étant u et v, appelons φ et ψ ses coordonnées biangulaires relatives aux mêmes pôles f et f_1.

Les angles α β que fait avec les rayons vecteurs un déplacement infiniment petit $m m'$ seront déterminés par les deux formules.

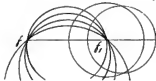
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{u\,d\varphi}{v\,d\psi} = \frac{\sin\psi\,d\varphi}{\sin\varphi\,d\psi}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{du}{dv}$$

en sorte que si deux séries de courbes donnent, l'une en coordonnées bipolaires, l'autre en coordonnées biangulaires, des valeurs de $\frac{du}{dv}$, $\frac{d\varphi}{d\psi}$ qui satisfassent en chaque point du plan à la relation :

$$(a) \qquad \left(\frac{du}{dv}\right) : \left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right) = \frac{u}{v} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$$

ces deux séries formeront un réseau orthogonal.

Cette remarque permet de déterminer simplement un assez grand nombre de réseaux orthogonaux.

Soit, par exemple, une série de cercles rapportés à deux points conjugués $f f_1$ situés sur un diamètre commun à tous ces cercles. L'équation générale de cette série sera

---

(1) Lorsqu'un cercle de rayon nul est doublement tangent à une courbe, le point de concours des tangentes communes au cercle et à la courbe est le centre même du cercle, et par conséquent ces tangentes sont les asymptotes du cercle, ou en d'autres termes, elles passent par les points circulaires à l'infini.

$$\frac{u}{v} = \text{Constante}$$

et la relation (a) donnera pour leurs trajectoires orthogonales

$$\varphi - \psi = \text{Constante}$$

c'est-à-dire une autre série de cercles passant tous par les points $f f_1$.

Prenons actuellement pour première série les Cassinoïdes ou ovales de Cassini définis à la page 88 leur équation sera :

$$uv = \text{constante}$$

et la relation (a) donnera pour l'autre série

$$\varphi + \psi = \text{Constante}$$

c'est-à-dire une série d'hyperboles équilatères passant par les deux pôles (1)

Enfin aux ellipses homofocales :

$$u \pm v = \text{Constante}$$

correspondent les ellipses homofocales d'espèce contraire

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \times \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \text{Constante} \quad \ldots \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \times \cot \frac{\psi}{2} = \text{Constante}\ ^{(2)}$$

et nous retrouvons ainsi le réseau orthogonal déjà étudié.

Transformations planes pour lesquelles les réseaux isogonaux restent isogonaux

Supposons que deux rayons vecteurs $\bar{u}$ et $\bar{v}$ décrivent deux courbes Γ, Γ' et soient deux autres rayons vecteurs $\bar{U}$ et $\bar{V}$ liés aux premiers par les équipollences :

$$(\alpha) \quad \begin{aligned} \bar{U} &= F(\bar{u}) \\ \bar{V} &= F(\bar{v}) \end{aligned}$$

---

(1) Car les deux faisceaux φ et ψ sont homographiques et donnent toujours des rayons parallèles pour deux directions rectangulaires.

(2) Cette équation des coniques homofocales résulte immédiatement de ce que, d'après le théorème IV, page 114, le cercle inscrit dans le triangle formé par le grand axe et les deux rayons vecteurs aboutissant au point m d'une conique touche ce grand axe en un sommet.

F représentant une fonction géométrique quelconque d'ailleurs. Les nouveaux rayons vecteurs décriront deux nouvelles courbes $C\ C'$.

Si les deux premières se coupent en un point μ, les deux nouvelles se couperont au point correspondant m et si l'on donne à partir de ce point aux rayons $\bar{u}$ et $\bar{v}$ les accroissements géométriques $\mu\nu$ $\mu\pi$, ou $d\bar{u}$ $d\bar{v}$, $\bar{U}$ et $\bar{V}$ prendront les accroissements mn, mp ou $d\bar{U}$ $d\bar{V}$. Mais d'après les relations (α)

$$\frac{d\bar{U}}{d\bar{V}} = \frac{F'(\bar{u})}{F'(\bar{v})}\,\frac{d\bar{u}}{d\bar{v}} = \frac{d\bar{u}}{d\bar{v}}$$

le triangle mnp est donc semblable au triangle $\mu\nu\pi$ et par suite les courbes $C\ C'$ se coupent sous le même angle que les courbes $\Gamma\ \Gamma'$.

Ainsi toute transformation rentrant dans celle que nous venons de définir conserve la similitude infinitésimale des figures planes

Si l'on prend pour la relation (α) l'équation générale du premier degré.

$$\bar{U}\bar{u} + \bar{a}\bar{V} + \bar{b}\bar{u} + \bar{c} = 0$$

où $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$ sont des constantes géométriques, on a la transformation par rayons vecteurs réciproques (Lucas)[1].

---

(1) Car cette équation peut s'écrire

$$(\bar{V} + \bar{b})(\bar{u} + \bar{a}) = \bar{K}$$

et sous cette forme elle exprime que le produit géométrique des rayons vecteurs allant de m et de μ aux points fixes a et b est constant : ou en d'autres termes, que le produit algébrique des longueurs ma, μb est constant quand ces rayons tournent d'angles égaux et de signes contraires

Note 8.

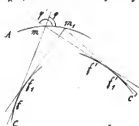
Sur la rectification des courbes planes.

Le problème de la rectification des courbes est un de ceux dont la solution analytique offre d'assez grandes difficultés. Il n'est donc pas sans intérêt d'indiquer ici comment ce problème peut se résoudre dans un assez grand nombre de cas par de simples considérations géométriques.

I. Rectification des Caustiques.

Quand une droite de longueur variable ab ou l se déplace, si l'on appelle ds ds' les chemins élémentaires parcourus par ses extrémités, α et β les angles que font ces déplacements avec la direction de la droite prolongée au-delà de a et de b, on a toujours en négligeant les infiniment petits du deuxième ordre :

$$dl = ds \cos.\alpha + ds' \cos\beta$$

Appliquons cette relation aux côtés mf mf' d'un angle variable fmf' qui touche en f et f' deux courbes fixes.

En désignant par $d\sigma$ le déplacement mm_1 du point m et par ds ds' les chemins parcourus par les points de contact sur les courbes c et c', ces chemins étant comptés positivement dans le sens fm, $f'm$, nous aurons :

$$dl = -ds + d\sigma \cos.\varphi$$
$$dl' = -ds' + d\sigma \cos.\varphi'$$

Si maintenant les courbes cc' qui touchent les côtés de l'angle sont caustiques réciproques relativement à la courbe A,

$$\text{Cos.}\,\varphi = n\,\text{Cos.}\,\varphi'$$

en sorte que $\quad dl - n\,dl' = -ds + n\,ds'$

ou en intégrant entre deux limites :

$$(\overline{\mu\varphi} - n\,\overline{\mu\varphi'}) - (\overline{mf} - n\,\overline{mf'}) = -(\text{arc}\,f\varphi - n\,\text{arc.}\,f'\varphi')$$

en tenant compte, bien entendu, du signe des arcs

Si les deux courbes sont caustiques par réflexion, $n = \pm 1$ et l'on a par exemple dans le cas de la figure :

$$\mu\varphi + \mu\varphi' + \text{arc}\,f\varphi + \text{arc}\,f'\varphi' = mf + mf'$$

c'est-à-dire que le contour mixtiligne $f\varphi\mu\varphi'f'$ est constant lorsque le point μ se déplace.

En d'autres termes, la trajectoire $m\mu$ est celle que décrirait la pointe d'un crayon qui se déplacerait à partir de la position m en maintenant toujours tendu le fil fmf' dont les extrémités seraient fixées en f et f' et qui pendant le mouvement s'appliquerait sur la convexité des courbes C et C'.

On étendrait facilement ce mode de génération aux différents cas possibles en changeant des sommes en différences et on trouverait ainsi une définition se rapprochant de celle de l'hyperbole comme la précédente se rattache à celle de l'ellipse [1]

Ces remarques permettent la rectification immédiate de la courbe C' toutes les fois que la courbe C est un point ou une courbe déjà rectifiée.

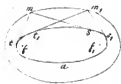
Si la courbe C n'est pas rectifiable, on pourra trouver sur les courbes C et C' des arcs dont la somme ou la différence sera rectifiable, c'est-à-dire des arcs associés.

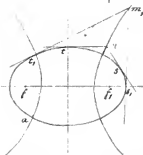
Application aux sections coniques. Théorèmes de Graves, Mac Cullagh et Chasles.

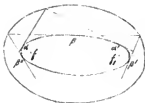
En appliquant les considérations qui précèdent aux coniques homofocales, et en se rappelant (Note 7) qu'une conique est toujours sa propre caustique par réflexion relativement à une conique homofocale quelconque, on arrive aux théorèmes suivants.

I. Si d'un point m pris sur une ellipse homofocale à une ellipse

---

(1) A chacune de ces deux définitions, correspond pour deux courbes données CC' une série de courbes A : ces deux séries sont orthogonales.

donnée on mène les tangentes mt ms à cette ellipse, le contour mixtiligne $mtasm$ a une longueur indépendante de la position du point m sur l'ellipse extérieure (Graves)

II. Si d'un point m pris sur une hyperbole homofocale à une ellipse donnée, on mène les tangentes mt ms à cette ellipse, en appelant a le point d'intersection des deux coniques situé dans l'angle opposé des axes, la différence des contours mixtilignes atm, asm est constamment nulle, quelle que soit la position du point m sur l'hyperbole (Mac Cullagh)

Ces beaux théorèmes s'étendent facilement au cas où la conique donnée est une hyperbole

Ils permettent, étant pris un arc quelconque $\alpha\alpha'$ sur une ellipse et un point β, de déterminer à partir de ce point deux arcs $\beta\beta'$ $\beta\beta'$ associés à $\alpha\alpha'$ et donnant avec lui une différence ou par leur complément à l'ellipse entière, une somme rectifiable

Si β coïncide avec l'une des extrémités de $\alpha\alpha'$, β' coïncide avec l'autre extrémité.

L'analyse démontrant d'ailleurs d'une façon générale qu'un arc d'ellipse ou d'hyperbole ne saurait être rectifié, il en résulte le théorème suivant

Étant pris deux arcs associés $\alpha\alpha'$ $\beta\beta'$ sur une conique, les points de concours des tangentes en α et α', β et β' sont sur une même conique homofocale à la première (1).

---

(1) Car s'il n'en était pas ainsi, on pourrait de part et d'autre, de β par exemple, déterminer deux arcs associés à $\alpha\alpha'$ et différents tous deux de $\beta\beta'$.

Soient $\beta\gamma$ $\beta\gamma'$ ces deux arcs : on devrait avoir,

$\beta\gamma \pm \beta\beta'$ = un arc rectifiable

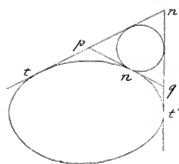
α α' γ β β' γ' Si l'on prenait le signe + $\beta'\gamma$ serait rectifiable, ce

Mais si $\alpha\alpha' - \beta\beta'$ est rectifiable, $\alpha\beta - \alpha'\beta'$ l'est aussi : donc $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ sont associés. Donc enfin : le quadrilatère complet formé par les quatre tangentes aux points $\alpha\,\alpha'\,\beta\,\beta'$ a ses six sommets situés deux à deux sur des coniques homofocales à la proposée, ce qui complète l'énoncé précédent.

En rapprochant ce résultat de celui déjà trouvé (page 114) on est conduit à la proposition suivante :

Le quadrilatère formé par les quatre tangentes aux extrémités de deux arcs associés est toujours circonscriptible au cercle (Chasles).

Corollaires. I. Si en un point d'une conique on décrit avec un rayon arbitraire un cercle tangent à la conique et qu'on mène ensuite les tangentes communes aux deux courbes, ces tangentes déterminent à partir du point de contact deux arcs associés sur la conique.

II. Un polygone à périmètre minimum circonscrit à une conique détermine sur cette conique une série d'arcs associés.

On a vu (page 87) que la lemniscate était la courbe réciproque de l'hyperbole équilatère relativement à son centre : il existe entre les arcs correspondants de ces deux courbes la remarquable relation suivante :

A des arcs associés d'hyperbole équilatère correspondent des arcs égaux sur la lemniscate et réciproquement (Chasles)

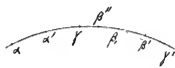
Démontrons d'abord le lemme suivant :

Si ts, $t's'$ sont deux positions de la tangente à l'hyperbole équilatère m et m' leurs points de contact, μ leur commune intersection, on a :

$$\mu m . m't' = \mu m' . mt$$

En effet, écrivons que les aires $\mu tt'$, $\mu ss'$ sont égales, nous aurons :

$$\mu t . \mu t' = \mu s . \mu s'$$

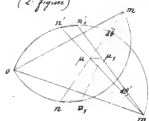
---

qui est impossible ; si l'on prenait le signe − comme on peut déterminer à partir de β et dans le sens opposé à $\beta\beta'$ un arc $\beta\beta''$ dont la différence avec $\beta\beta'$ est rectifiable, il s'en suivrait que $\beta''\gamma$ serait rectifiable : ce qui est également impossible.

c'est-à-dire à cause de $ms = mt$, $m's' = m't'$:

(1re figure)

$$(mt+\mu m)(m't'-\mu m') = (mt-\mu m)(m't'+\mu m')$$

d'où l'on tire, en simplifiant, la relation cherchée.

Considérons maintenant (2e figure) les deux points n et n' de la lemniscate situés sur les deux tangentes ts $t's'$ et supposons que le point μ se déplace en restant sur une ellipse homofocale à l'hyperbole proposée. A un déplacement $\mu\mu_1$ de ce point correspondront pour n et n' les déplacements nn_1, $n'n'_1$.

Les arcs infiniments petits de lemniscate appartiennent aussi aux cercles décrits sur om' om comme diamètres. leur valeur peut donc s'écrire en appelant $d\theta$ $d\theta'$ les angles $\mu_1 m\mu$, $\mu_1 m'\mu$:

(2e figure)

$$nn_1 = om.d\theta \qquad n'n'_1 = om'd\theta'.$$

mais $\mu\mu_1$ étant également incliné sur $m\mu$ et $m'\mu$, les angles $d\theta$ et $d\theta'$ sont liés par :

$$m'\mu \; d\theta' = m\mu \; d\theta$$

donc :

$$m'\mu . \frac{n'n'_1}{om'} = m\mu . \frac{nn_1}{om}$$

c'est-à-dire, à cause du lemme et comme $om = mt$, $om' = m't'$.

$$n'n'_1 = nn_1$$

Ainsi lorsque le point μ se déplace sur une ellipse homofocale à l'hyperbole équilatère, l'arc de lemniscate nan' s'accroît de quantités égales à ses deux extrémités.

Si le point μ se déplaçait sur une hyperbole homofocale, on démontrerait de même que l'arc nan' est constant.

Si l'on observe que le cercle décrit sur $o\mu$ comme diamètre coupe la lemniscate aux deux points nn' (1) le résultat précédent pourra s'énoncer en disant que : les cercles décrits sur les rayons d'une conique homofocale à l'hyperbole équilatère détachent dans la lemniscate des arcs nan' tels que arc an ± arc an' = Constante

La correspondance remarquable qui résulte de ce théorème fournit

(1) Un cercle passant au centre ne coupe la lemniscate qu'en deux points parce que les points circulaires à l'infini sont deux points doubles imaginaires de la courbe

pour les arcs égaux de lemniscate un assez grand nombre de propriétés dérivant des propositions démontrées sur les arcs associés des sections coniques.

II. Rectification des roulettes et des enveloppes de courbes mobiles.

I. Lorsqu'une courbe peut être considérée comme trajectoire d'un point mobile dans le roulement de deux courbes C, K l'une sur l'autre, l'arc élémentaire ds de cette courbe est donné par la relation.

$$ds = l\,d\alpha.$$

où l désigne le rayon om qui va de m au point de contact des courbes roulantes et $d\alpha$ l'angle dont tourne toute la figure dans le temps dt, c'est-à-dire la différence algébrique $\varepsilon - \varepsilon'$ des angles de contingence correspondant sur les courbes C et K à un même accroissement de l'arc.

l'arc de roulette décrit pendant que le point o se déplace de oo' sur K sera donc.

$$(a) \qquad s(oo') = \int_0^{o'} l(\varepsilon - \varepsilon')$$

II. Lorsqu'une courbe peut être considérée comme l'enveloppe d'une courbe mobile dans le roulement de deux courbes C. K l'une sur l'autre, l'arc élémentaire de cette courbe est donnée par l'expression:

$$d\sigma = h\,d\alpha \pm d\Sigma$$

où $d\alpha$ a la même signification que dans la relation précédente, où h représente la longueur de la normale op abaissée du centre instantané sur la courbe mobile et $d\Sigma$ le déplacement élémentaire du point p sur cette courbe.

Remplaçant comme précédemment $d\alpha$ par $\varepsilon - \varepsilon'$, et intégrant entre les mêmes limites, on a:

$$(b) \qquad \sigma(oo') = \int_0^{o'} h(\varepsilon - \varepsilon') \pm \Sigma(oo')$$

Les formules (a) et (b) donnent lieu à quelques remarques.

A. Si, sans changer la courbe roulante, on modifie la base du roulement de façon à ce que les valeurs de $\varepsilon - \varepsilon'$ qui correspondent aux valeurs successives de l ou de h soient simplement multipliées par une constante n.

l'arc de nouvelle roulette sera égal à n fois l'arc de roulette primitive pris

entre les mêmes limites ;

l'arc de nouvelle enveloppe sera égal à n fois l'arc de l'enveloppe primitive plus ou moins (1-n) fois l'arc Σ(oo') de la courbe enveloppée.

Cette simple remarque fournit immédiatement :

la rectification des épicycloïdes (y compris la cycloïde et la cardioïde) par la comparaison avec l'épicycloïde qui est une droite (cercle roulant dans un cercle de rayon double),

la rectification des enveloppes de droites dans tout mouvement épicycloïdal par la comparaison avec le cas où ces enveloppes sont des cercles (cercle roulant sur un cercle de rayon moitié qui lui est intérieur),

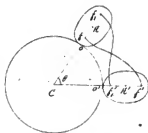
la rectification de la chaînette par la comparaison avec la droite qu'on obtient en remplaçant la base rectiligne par une parabole symétrique de la parabole roulante relativement à leur tangente commune,

la comparaison entre les arcs d'ellipse et les arcs d'épicycloïdes allongées ou raccourcies, y compris les cycloïdes allongées et raccourcies et le limaçon de Pascal.

B. S'il existe entre les rayons vecteurs $l\,l'\,l''$ qui vont de différents points du plan mobile à un point de la courbe roulante une relation linéaire telle que :

$$ml + m'l' + m''l'' + \dots = M$$

$m\ m'\ m''$ ... M étant des constantes, la même relation a lieu entre les arcs décrits simultanément par les points $m, m' m''$.

Application aux foyers de l'ellipse et des ovales de Descartes en général.

Si l'on considère le cas d'une ellipse roulant sur un cercle, les deux foyers décrivant la même courbe, la formule donne la longueur de l'arc ff' ou f_1f_1' de cette courbe comprise entre deux sommets consécutifs : cet arc est $a(\pi+\theta)$ en appelant $2a$ le grand axe de l'ellipse et θ l'angle fof'.

Application au roulement d'un cercle sur une courbe quelconque.

Deux points situés sur un même diamètre et conjugués par rapport au cercle donnent la relation $l = Kl'$

C. S'il existe entre les normales $h\ h'\ h''$ abaissées d'un point de la courbe roulante sur les courbes mobiles $M\ M'\ M''$ une relation linéaire telle que

$$mh + m'h' + m''h'' + \ldots = M$$

les différences des arcs σ d'enveloppes avec les arcs Σ d'enveloppées qui leur correspondent sont liées par la même relation.

Application aux enveloppes de trois droites quelconques : si l'on appelle S la surface du triangle formé par les trois droites et $a\ a'\ a''$ les trois côtés de ce triangle, on a (en tenant compte des signes)

$$ah + a'h' + a''h'' = 2S$$

Si les trois droites passent par un même point, cette relation doit être remplacée par la suivante.

$$h \sin.(A'A'') + h' \sin.(A''A) + h'' \sin.(AA') = 0$$

Application au cas où la courbe roulante est une droite : dans ce cas, deux droites quelconques du plan mobile donnent une relation de la forme :

$$mh + m'h' = M$$

Application au cas où deux courbes roulantes sont caustiques secondaires réciproques relativement à la courbe roulante

On a, (d'après le théorème de la page 50)

$$h = mh'$$

Si la base du roulement est une droite et si la caustique est par réflexion, il y a toujours deux caustiques secondaires dont les enveloppes sont des courbes symétriques par rapport à cette base. En désignant par σ les arcs égaux de ces enveloppes, et par $\Sigma\ \Sigma'$ les arcs des caustiques secondaires, on aura :

$$2\sigma = \Sigma + \Sigma'$$

et l'on voit que les enveloppes seront rectifiables toutes les fois que leurs enveloppées le seront

Dans le cas particulier où la courbe M se réduit à un point p $\Sigma = 0$, Σ' est alors double de l'arc de podaire de la courbe roulante relativement à p et l'on a ce théorème :

L'arc de roulette décrit par un point est égal à l'arc de podaire de la courbe roulante prise par rapport à ce point et entre les mêmes limites (Steiner).

Applications : rectification de la chaînette (la podaire est la tangente à la parabole en son sommet) - rectification de la courbe décrite par les foyers d'une conique roulant sur une droite (la podaire

est un cercle)

D. Les remarques B et C s'étendent sans difficulté au cas où il existe une relation linéaire entre les rayons vecteurs $l\,l'$.. de plusieurs points mobiles et les normales $h\,h'$ abaissées sur plusieurs courbes mobiles.

Application aux foyers et aux directrices des sections coniques.

E. Supposons qu'un des côtés d'un angle droit tourne autour d'un point fixe a tandis que le sommet S décrit une certaine courbe K. le second côté enveloppera une courbe M dont K sera la podaire relativement à a. Et d'après la relation (b) l'arc d'enveloppe sera

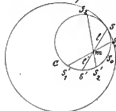
$$\int o_1 p\, d\alpha + \Sigma \quad \ldots \text{ ou bien } \quad \int l\, d\alpha + \Delta n.$$

en appelant $d\alpha$ l'angle dont tourne aS ou l autour du point a, Δn l'accroissement de la sous-normale n correspondant aux limites de l'intégral

Application au cas de la lemniscate. les arcs de la courbe décrite par le centre lorsqu'une lemniscate roule sur une droite s'expriment en fonction des arcs correspondant d'hyperbole équilatère.

Application au cas de la parabole. les arcs de la courbe enveloppe du côté d'un angle droit dont le sommet décrit la parabole tandis que l'autre côté passe au foyer, s'expriment en fonction des arcs de chaînette et sont par conséquent rectifiables.

Application aux sections coniques.

Appliquons les remarques précédentes à l'étude comparative des arcs de sections coniques.

Soit d'abord un cercle de rayon r roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon double : un point m du plan mobile engendre une ellipse dont l'arc correspondant au roulement S_1S_2 du petit cercle sera

$$B(S_1 S_2) = \int_{S_1}^{S_2} \frac{l\,ds}{2r}$$

en appelant l la longueur ms et S l'arc parcouru par le point de contact à partir d'un point S_0 du petit cercle

Mais si l'on prolonge les côtés de l'angle $S_1 m S_2$ jusqu'à leurs secondes intersections en $S_1'\,S_2'$ avec le petit cercle, à ce nouvel arc de cercle $S_1'S_2'$ correspondra un nouvel arc d'ellipse et si l'on convient d'affecter du signe − les arcs correspondant à un roulement négatif, cet arc sera

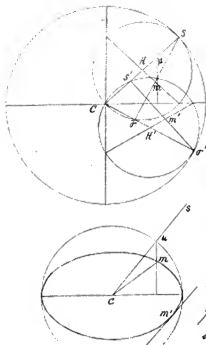
$$B(S_1'S_2') = -\int_{S_1'}^{S_2'} \frac{l'\,ds'}{2r}$$

donc

$$E(S_1 S_2) - E(S_1' S_2') = \int_{S_1}^{S_2} \frac{l\,ds}{2r} + \int_{S_1'}^{S_2'} \frac{l'\,ds'}{2r}$$

ou à cause de : $\quad l\,ds' + l'\,ds = 0$

et en appliquant aux signes $\int$ des limites correspondantes :

$$E(S_1S_2) - E(S_1'S_2') = \int \frac{(l+l')(ds+ds')}{2r} = 2r \int \sin.\frac{s+s'}{2r} \times \frac{ds+ds'}{2r} = 2r\left(\cos.\frac{s_1+s_1'}{2r} - \cos\frac{s_2+s_2'}{2r}\right)$$

Il est d'ailleurs facile de reconnaître le mode de correspondance des points que limitent ces arcs sur l'ellipse. La figure ci-jointe montre immédiatement que la tangente en l'un de ces points m' est parallèle au rayon CS du cercle C qui correspond à l'autre point.

Mais les rayons du cercle C correspondent à ceux du cercle décrit sur le grand axe et dont l'ellipse est la projection, en sorte que si l'on appelle m et m' les coefficients angulaires des tangentes aux points correspondants, on aura :

$$m m' = \frac{b}{a}$$

et l'on vérifie facilement que les arcs associés déterminés par cette relation rentrent comme cas particuliers dans ceux donnés par les théorèmes de Graves et de Mac Cullagh.

Théorème de Landen.

Supposons actuellement, qu'étant pris comme précédemment le cercle de rayon r et le point m dans son plan, on laisse le cercle et le point immobiles et qu'on fasse tourner autour du point l'un des côtés d'un angle droit dont le sommet soit assujetti à rester sur ce cercle. Le second côté enveloppera une conique dont le point m sera le foyer, et qui sera une ellipse si comme dans le cas de la figure, le point m est intérieur au cercle. L'arc élémentaire de cette courbe sera, d'après la remarque E :

$$dE = d\overline{mn} + l\,d\varphi$$

ou, à cause de $d\varphi = \frac{ds+ds'}{2r}$, et d'après la valeur trouvée pour l'arc d'ellipse roulette :

$$dE = d\overline{mn} + \frac{l\,ds'}{2r} + dE$$

mais au point m correspond sur le diamètre Km un point conjugué donnant par la même construction une hyperbole enveloppe dont l'arc élémentaire correspondant au même arc de cercle ds sera :

$$dY = d\overline{\mu\nu} + \lambda\,d\psi$$

ou à cause de : $d\psi = \frac{ds'-ds}{2r}$ et de $\lambda = Kl$

$$dY = d\overline{\mu\nu} + \frac{Kl\,ds'}{2r} - K\,dE$$

on en déduit, éliminant $\frac{l\,ds'}{2r}$ et intégrant entre des limites correspondantes :

$$Y - KE + 2KE = \Delta(\overline{\mu\nu} - K\overline{mn})$$

c'est dans cette relation entre deux arcs d'ellipse et un arc d'hyperbole que consiste le théorème de Landen.